国際研究論叢　24（2）：171～191，2011

ファジィ指数型 AHP モデルにおけるパラメータの最適化

小谷　直也[*1]　　安達　康生[*2]　　古殿　幸雄[*3]　　植松　康祐[*4]

The Optimum of Parameters in AHP Model with Exponential Fuzzy Number

Naoya Kotani [*1]　Yasuo Adachi [*2]　Yukio Kodono [*3]　Koyu Uematsu [*4]

Abstract

In this paper, we propose to introduce the concept of exponential fuzzy number into a simple AHP(Analytical Hierarchy Process) model. The variety of the bottom "a" in the exponential fuzzy number has a big influence on the decision making of AHP method. We will discuss the optimal bottom "a" which maximizes the difference of weights between two alternatives. In addition to the exponential fuzzy number, we let the AHP model include the concept of α-Cut. The optimal "α" means that membership functions of two alternatives do not intersect at level α. We have carried out all simulations. As a result, it was found that the tracks of intersections between two membership functions have three patterns. It is convinced that the optimal "α" will become effective for all AHP models with exponential fuzzy number.

Key words

AHP, Pairwise Comparison Scale, Exponential Fuzzy Number, Decision Making

1．はじめに

1970年代に Saaty によって開発された AHP（階層化意思決定法）[1], [2] は，意思決定の要因となる基準を階層化することで，複雑な意思決定構造を単純化して，意思決定を行うための手法である．本研究では，AHP で用いる一対比較値に，ファジィ概念を導入する方法について検討している．AHP をファジィ化する方法としては，1985年に Buckley

＊1　こたに　なおや：大阪国際大学国際関係研究所研究協力員，非常勤講師〈2010.9.30受理〉
＊2　あだち　やすお：大阪国際大学現代社会学部准教授
＊3　こどの　ゆきお：大阪国際大学ビジネス学部教授
＊4　うえまつ　こうゆう：大阪国際大学ビジネス学部教授

によって，メンバーシップ関数を右と左の形状で形成するL-R型ファジィ数を用いた方法が提案されている[3]．この他に，AHPにファジィ概念を導入する方法としては，一対比較行列に含まれる不確実さを反映させるために，ウェイトを区間値にする方法[4]や一対比較行列の要素にファジィ数を導入し，ファジィ逆数行列を用いる方法[5]などが提案されている．これらは，一対比較値の段階において，ファジィ概念を直接導入しない方法である．あるいは，ファジィ積分の概念を用いる方法[6]やファジィウェイトを用いる方法[7]もあるが，これも一対比較値の段階でファジィ概念を直接導入しない方法と考えることができる．また，一対比較値をファジィ数で表現する方法[3]やファジィ指数により表現する方法[8]，ファジィ対数により表現する方法[9]なども提案されている．これらは，一対比較値の段階において，ファジィ概念を直接導入する方法で，先に記載したBuckleyの研究もこれらの研究に入れることができる．

一対比較値にファジィ概念を導入するために，一対比較値の形状を検討する実験が行われ，その実験結果からファジィ一対比較値を推定し，このファジィ一対比較値の代表値を用いた実証的実験を行うことで，新たなファジィ一対比較値が著者らによって提案[10]されている．その後，被験者にとって一般的で扱いやすい数値の一対比較値を作成し，一対比較値のスケール変化に伴う実験的考察が行われた[11]．これらの実験結果をふまえて，一対比較値に対して直接ファジィ概念を導入する方法としてファジィ指数を用いたファジィ指数型AHPが提案された[12]．ここでは，一対比較値に直接ファジィ概念を導入し，被験者に対して使いやすいことを目的としたファジィ指数を用いる一対比較値について述べる．文献[10]において，２つの図形面積の比較を行い，基準となる図形面積との面積の差が大きくなるにつれて回答精度が下がっていることなど，人間の感覚において，比較のしやすい対象どうしはあいまいさが小さく，比較がしにくくなる対象どうしに対しては，あいまいさが大きくなる傾向がみられた．これらの現象を反映させる為に，「要素iは要素jと比較してどれくらい重要か」と要素２組を比べる一対比較に用いる一対比較値には，aを底とするファジィ数$\underset{\sim}{n}$を指数として導入する．これを本研究では，ファジィ指数型AHPと呼ぶこととし，一対比較値を$a^{\underset{\sim}{n}_{ij}}$と表記する．一対比較値に指数を用いることで，一定間隔の一対比較値ではなく，指数的な間隔で表現した表１－１の一対比較となる．す

表 1－1　指数を用いる一対比較値

（要素 jと比較して要素i は）	→	$\left(a^{\underset{\sim}{n}_{ij}}\right)$
同じくらい重要	→	a^0
若干重要	→	$a^{\underset{\sim}{1}}$
少し重要	→	$a^{\underset{\sim}{2}}$
重要	→	$a^{\underset{\sim}{3}}$
かなり重要	→	$a^{\underset{\sim}{4}}$
絶対的に重要	→	$a^{\underset{\sim}{5}}$
$a_{ii}=a^0=1$　$a^{\underset{\sim}{n}_{ji}}=a^{-\underset{\sim}{n}_{ij}}$		

なわち，表１-１となる．本来の一対比較値は１,２,３,４,５,６,７,８,９の一定間隔の９つの数値を用いるが，ファジィ指数型一対比較値は，６つの数値 $\underset{\sim}{n} = 0, \underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{2}, \underset{\sim}{3}, \underset{\sim}{4}, \underset{\sim}{5}$ を用いることで比較的大きな値まで表現できる指数間隔を導入した．

２．ファジィ指数型一対比較行列

本研究では，提案する一対比較値 $a^{\underset{\sim}{n}}_{ij}$（$\underset{\sim}{n} = 0, \underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{2}, \underset{\sim}{3}, \underset{\sim}{4}, \underset{\sim}{5}$）を用いるファジィ指数型 AHP による，一対比較値の考察を行う．a を底とする $\underset{\sim}{n}$ は，区間［m_0, m_2］とした三角型のメンバーシップ関数を用いる．そして三角型のメンバーシップ関数の頂点を m_1 とする（図２-１）．ここでは，メンバーシップ関数の表記が複雑になるため，$\underset{\sim}{A} = [m_0, m_1, m_2]$ の３点で表記することにする．図で表すと，メンバーシップ関数のＹ軸にグレード（度合い）を示し，Ｘ軸は全体集合の部分としてのみ定義され，これは台集合と呼ばれる（図２-１）．グレードとは，１に近いほど値がその集合の要素に含まれる度合いが大きいとされ，区間［0, 1］からなる．各グレードを表記する方法は，ファジィ理論の分解定理による α カットを用いることができ，これによりウェイトや総合評価の値をグレードの高いレベルで表現することが可能となる [13]．

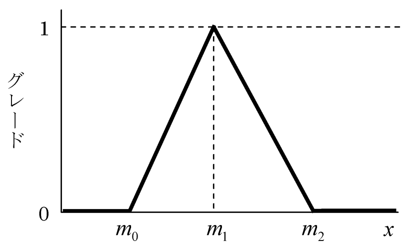

図 2-1　三角型のメンバーシップ関数

また，三角型メンバーシップ関数を定義するならば，

$$h_{\underset{\sim}{n}}(x) = \begin{cases} 0 & , x < m_0 \\ \dfrac{x - m_0}{m_1 - m_0} & , m_0 \leqq x \leqq m_1 \\ \dfrac{m_2 - x}{m_2 - m_1} & , m_1 \leqq x \leqq m_2 \\ 0 & , x > m_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

となる [13]．

上記の三角型メンバーシップ関数に α カットを適応すると，その区間とメンバーシップ関数は次のようになる．

$$\forall\alpha\in[0,1]:\underset{\sim}{A}_{\alpha}\begin{aligned}[t]&=[(m_1-m_0)\alpha+m_0,m_1,-(m_2-m_1)\alpha+m_2]\\&=[m_{\alpha 0},m_1,m_{\alpha 2}]\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$h_{\underset{\sim}{n}\alpha}(x)=\begin{cases}0 & ,x<(m_1-m_0)\alpha+m_0\\ \dfrac{x-m_0}{m_1-m_0} & ,(m_1-m_0)\alpha+m_0\leqq x\leqq m_1\\ \dfrac{m_2-x}{m_2-m_1} & ,m_1\leqq x\leqq -(m_2-m_1)\alpha+m_2\\ 0 & ,x>-(m_2-m_1)\alpha+m_2\end{cases} \tag{2.3}$$

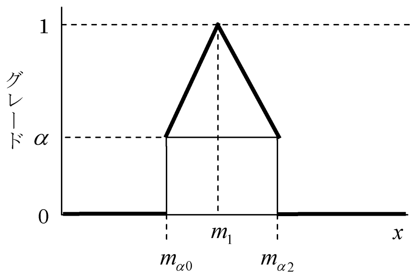

図 2-2　三角型のメンバーシップ関数

$\underset{\sim}{n}$には，$0,\underset{\sim}{1},\underset{\sim}{2},\underset{\sim}{3},\underset{\sim}{4},\underset{\sim}{5}$を用いて，区間は［$n-1$，$n+1$］とする．なお，$n=0$のとき$a^0=1$を用いる．これらをメンバーシップ関数で示すと図2-3になる．たとえば，$\alpha=0$のとき，$n=1$ならば，区間［$n-1$，$n+1$］は，［0, 2］となり，$\alpha=0.5$のとき，$n=1$ならば，区間［$n-(1-\alpha)$，$n+(1-\alpha)$］は，［0.5, 1.5］となり，$\alpha=1$のとき，$n=1$ならば，区間［$n-(1-\alpha)$，$n+(1-\alpha)$］は，［1, 1］となり，三角型メンバーシップ関数の頂点となる．

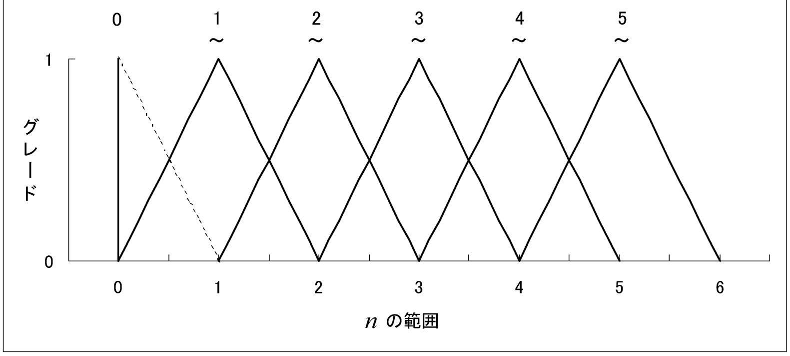

図 2-3　ファジィ数$\underset{\sim}{n}$のメンバーシップ関数

さらに，AHP では，要素 A_i が要素 A_j を比較して高い評価なら，常に値が正の値であることから，$a_{ij}>1$ となり，対象が同じならば評価も同じになることから $a_{ij}=1$ となる．提案するファジィ指数型 AHP でも同様に表すと，要素 A_i が要素 A_j を比較して高い評価は $\underset{\sim}{a}^{n}_{ij}>1$ であり，対象が同じ時は $\underset{\sim}{a}^{n}_{ii}=1$ であり，$n=0$，$a^{0}_{ii}=1$ となる．本研究では，対象が同じときはあいまいさが含まれないものとして扱う．また A_i が A_j より，$\underset{\sim}{a}^{n}_{ij}$ の評価であれば，A_j は A_i の $\underset{\sim}{a}^{-n}_{ij}$ の評価になる．このことから $\underset{\sim}{a}^{n}_{ji}=\underset{\sim}{a}^{-n}_{ij}$ となる．行列で表すと一対比較行列 A は次式のようになる．

$$A=\left[\underset{\sim}{a}^{n}_{ij}\right]=\begin{bmatrix} 1 & \underset{\sim}{a}^{n}_{12} & \underset{\sim}{a}^{n}_{13} & \cdots \\ \underset{\sim}{a}^{-n}_{21} & 1 & \underset{\sim}{a}^{n}_{23} & \\ \underset{\sim}{a}^{-n}_{31} & \underset{\sim}{a}^{-n}_{32} & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^{0}_{11} & \underset{\sim}{a}^{n}_{12} & \underset{\sim}{a}^{n}_{13} & \cdots \\ \underset{\sim}{a}^{-n}_{21} & a^{0}_{22} & \underset{\sim}{a}^{n}_{23} & \\ \underset{\sim}{a}^{-n}_{31} & \underset{\sim}{a}^{-n}_{32} & a^{0}_{33} & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

式（2.4）に対して提案するファジィ指数型 AHP のウェイトの演算方法は，ファジィ理論の拡張原理を用いて幾何平均法により算出する．拡張原理とは，ファジィ集合の考え方をうまく応用し，数学の既存の理論としての枠組みにファジィ集合概念を取り入れ拡張する考え方であり，本研究で必要ないくつかの演算方法を定義しておく [13]．

$\underset{\sim}{A}_{\alpha}=[m_{0\alpha},m_1,m_{2\alpha}]$ と $\underset{\sim}{B}_{\alpha}=[s_{0\alpha},s_1,s_{2\alpha}]$ で，次式のようにして加算演算を定義する．ファジィ数の加算は，一般の加算と区別するために⊕という記号を用いることにする．

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{A}_{\alpha}\oplus\underset{\sim}{B}_{\alpha} &=[m_{\alpha0},m_1,m_{\alpha2}]\oplus[s_{\alpha0},s_1,s_{\alpha2}]\\ &=[((m_1-m_0)\alpha+m_0)+((s_1-s_0)\alpha+s_0),m_1+s_1,\\ &\qquad(-(m_2-m_1)\alpha+m_2)+(-(s_2-s_1)\alpha+s_2)]\\ &=[m_{\alpha0}+s_{\alpha0},m_1+s_1,m_{\alpha2}+s_{\alpha2}]\end{aligned} \qquad (2.5)$$

減算演算は⊖記号を用いて次のように定義する．

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{A}_{\alpha}\ominus\underset{\sim}{B}_{\alpha} &=[m_{\alpha0},m_1,m_{\alpha2}]\ominus[s_{\alpha0},s_1,s_{\alpha2}]\\ &=[((m_1-m_0)\alpha+m_0)-(-(s_2-s_1)\alpha+s_2),m_1-s_1,\\ &\qquad(-(m_2-m_1)\alpha+m_2)-((s_1-s_0)\alpha+s_0)]\\ &=[m_{\alpha0}-s_{\alpha2},m_1-s_1,m_{\alpha2}-s_{\alpha0}]\end{aligned} \qquad (2.6)$$

乗算演算は⊗記号を用いて次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{A}_\alpha \otimes \underset{\sim}{B}_\alpha &= [m_{\alpha 0}, m_1, m_{\alpha 2}] \otimes [s_{\alpha 0}, s_1, s_{\alpha 2}] \quad m_{\alpha 0} \geqq 0, s_{\alpha 0} \geqq 0 \\
&= [((m_1 - m_0)\alpha + m_0) \times ((s_1 - s_0)\alpha + s_0), m_1 \times s_1, \\
&\qquad (-(m_2 - m_1)\alpha + m_2) \times (-(s_2 - s_1)\alpha + s_2)] \\
&= [m_{\alpha 0} s_{\alpha 0}, m_1 s_1, m_{\alpha 2} s_{\alpha 2}]
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

除算演算は⊘記号を用いて次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{A}_\alpha \oslash \underset{\sim}{B}_\alpha &= [m_{\alpha 0}, m_1, m_{\alpha 2}] \oslash [s_{\alpha 0}, s_1, s_{\alpha 2}] \quad m_{\alpha 0} \geqq 0, s_{\alpha 2} \geqq 0 \\
&= \left[\frac{(m_1 - m_0)\alpha + m_0}{-(s_2 - s_1)\alpha + s_2}, \frac{m_1}{s_1}, \frac{-(m_2 - m_1)\alpha + m_2}{(s_1 - s_0)\alpha + s_0} \right] \\
&= \left[\frac{m_{\alpha 0}}{s_{\alpha 2}}, \frac{m_1}{s_1}, \frac{m_{\alpha 2}}{s_{\alpha 0}} \right]
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

となる．

そして，ファジィ数 $\underset{\sim}{A} = [m_{\alpha 0}, m_1, m_{\alpha 2}]$ の負値は $-\underset{\sim}{A} = [-m_{\alpha 2}, -m_1, -m_{\alpha 0}]$ である．指数演算においては，実数を T としてファジィ数 $\underset{\sim}{A}^T = (\underset{\sim}{A}^T)_\alpha = [(m_0{}^T)_\alpha, (m_1{}^T), (m_2{}^T)_\alpha]$ であり，実数 T に対してファジィ数 $\underset{\sim}{A}$ とするならば，$T^{\underset{\sim}{A}} = T^{\underset{\sim}{A}_\alpha} = [T^{m_{\alpha 0}}, T^{m_1}, T^{m_{\alpha 2}}]$ である．一般的な数との演算においては，グレードが０と１しかない集合として，足し算は $\underset{\sim}{A} \oplus T = [m_{\alpha 0} + T, m_1 + T, m_{\alpha 2} + T]$ であり，引き算は $\underset{\sim}{A} \ominus T = [m_{\alpha 0} - T, m_1 - T, m_{\alpha 2} - T]$ であり，掛け算は $\underset{\sim}{A} \otimes T = [m_{\alpha 0} T, m_1 T, m_{\alpha 2} T]$ であり，割り算は $\underset{\sim}{A} \oslash T = \left[\frac{m_{\alpha 0}}{T}, \frac{m_1}{T}, \frac{m_{\alpha 2}}{T} \right]$ のように演算を行う．

３．シンプルモデルの構築

シンプルな問題として評価基準を２つ，代替案を２つで検討を行う．評価基準は評価基準Ａと評価基準Ｂとし，代替案は代替案Ｐと代替案Ｑとする．

また，評価基準Ａと評価基準Ｂの一対比較において，評価基準Ａは評価基準Ｂより評価が高いものと仮定し，評価基準Ａに対する代替案Ｐと代替案Ｑの一対比較において，代替案Ｐは代替案Ｑより評価が高いものと仮定し，評価基準Ｂに対する代替案Ｐと代替案Ｑの一対比較において，代替案Ｐは代替案Ｑより評価が高いものと仮定して実験を行う．階層図は図３－１のようになる．

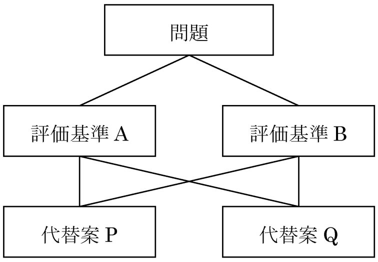

図 3-1　階層図

さらに，$\tilde{a}^{n}_{ij}$ の $\underset{\sim}{n}$ に対して，変数 x,y,k を用いる．変数 x,y,k は一対比較値である０～５を入力値として代入する．

具体的には，評価基準 B に対しての評価基準 A の評価の際には変数 x として，評価基準 A に対しての評価基準 B の評価の際には負値を用い変数 $-x$ とする．評価基準 A に対する代替案 Q に対しての代替案 P の評価の際には変数 y として，評価基準 A に対する代替案 P に対しての代替案 Q の評価には負値を用い変数 $-y$ とする．評価基準 B に対する代替案 Q に対しての代替案 P の評価の際には変数 k として，評価基準 B に対する代替案 P に対しての代替案 Q の評価には負値を用い変数 $-k$ とする．ファジィ指数型 AHP $\tilde{a}^{n}_{ij}$ の $\underset{\sim}{n}$ に対しての一対比較の結果を表３-１～３-３に示す．

表３-１　評価基準の $\underset{\sim}{n}$ の一対比較行列

	評価基準 A	評価基準 B
評価基準 A	[0,0,0]	$[(x-(1-\alpha)),x,(x+(1-\alpha))]$
評価基準 B	$[-(x+(1-\alpha)),-x,-(x-(1-\alpha))]$	[0,0,0]

表 3-2　評価基準 A に対する代替案の $\underset{\sim}{n}$ の一対比較行列

評価基準 A	代替案 P	代替案 Q
代替案 P	[0,0,0]	$[(y-(1-\alpha)),y,(y+(1-\alpha))]$
代替案 Q	$[-(y+(1-\alpha)),-y,-(y-(1-\alpha))]$	[0,0,0]

表 3-3　評価基準 B に対する代替案の $\underset{\sim}{n}$ の一対比較行列

評価基準 B	代替案 P	代替案 Q
代替案 P	[0,0,0]	$[(k-(1-\alpha)),k,(k+(1-\alpha))]$
代替案 Q	$[-(k+(1-\alpha)),-k,-(k-(1-\alpha))]$	[0,0,0]

表３－１の評価基準A, 評価基準Bの評価として一対比較行列Hを幾何平均法によるウェイトの演算を行う.

$$H=\begin{bmatrix} a^{[0,0,0]} & a^{[(x-(1-\alpha)),x,(x+(1-\alpha))]} \\ a^{[-(x+(1-\alpha)),-x,-(x-(1-\alpha))]} & a^{[0,0,0]} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

まず，Hの各行をh_1, h_2として，各々の幾何平均を求める.

$$\begin{aligned} h_1 &= (a^{[0,0,0]}\otimes a^{[(x-(1-\alpha)),x,(x+(1-\alpha))]})^{\frac{1}{2}} = (a^{[0,0,0]\oplus[(x-(1-\alpha)),x,(x+(1-\alpha))]})^{\frac{1}{2}} \\ &= a^{\left[\frac{(x-(1-\alpha))}{2},\frac{x}{2},\frac{(x+(1-\alpha))}{2}\right]} \\ h_2 &= (a^{[-(x+(1-\alpha)),-x,-(x-(1-\alpha))]}\otimes a^{[0,0,0]})^{\frac{1}{2}} = (a^{[-(x+(1-\alpha)),-x,-(x-(1-\alpha))]\oplus[0,0,0]})^{\frac{1}{2}} \\ &= a^{\left[\frac{-(x+(1-\alpha))}{2},-\frac{x}{2},\frac{-(x-(1-\alpha))}{2}\right]} \end{aligned} \quad (3.2)$$

つぎに，h_1, h_2の演算結果をその総和で割ることでウェイトWh_1, Wh_2を求める.

$$\begin{aligned} Wh_1 &= \left[\frac{a^{\frac{(x-(1-\alpha))}{2}}}{a^{\frac{(x+(1-\alpha))}{2}}+a^{\frac{-(x-(1-\alpha))}{2}}},\frac{a^{\frac{x}{2}}}{a^{\frac{x}{2}}+a^{\frac{-x}{2}}},\frac{a^{\frac{(x+(1-\alpha))}{2}}}{a^{(\frac{(x-(1-\alpha))}{2}}+a^{\frac{-(x+(1-\alpha))}{2}}}\right] \\ Wh_2 &= \left[\frac{a^{\frac{-(x+(1-\alpha))}{2}}}{a^{\frac{(x+(1-\alpha))}{2}}+a^{\frac{-(x-(1-\alpha))}{2}}},\frac{a^{\frac{-x}{2}}}{a^{\frac{x}{2}}+a^{\frac{-x}{2}}},\frac{a^{\frac{-(x-(1-\alpha))}{2}}}{a^{\frac{(x-(1-\alpha))}{2}}+a^{\frac{-(x+(1-\alpha))}{2}}}\right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

したがって，式（３.３）は評価基準ＡのウェイトWh_1と評価基準ＢのウェイトWh_2となる.

次に表３－２の評価基準Ａによる代替案Ｐ，代替案Ｑの評価として一対比較行列D_Aを評価基準と同様に幾何平均法による演算を行う.

$$D_A=\begin{bmatrix} a^{[0,0,0]} & a^{[(y-(1-\alpha)),y,(y+(1-\alpha))]} \\ a^{[-(y+(1-\alpha)),-y,-(y-(1-\alpha))]} & a^{[0,0,0]} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

まず，D_A の各行を d_{A1}，d_{A2}として，各々の幾何平均を求める．

$$
\begin{aligned}
d_{A1} &= (a^{[0,0,0]} \otimes a^{[(y-(1-\alpha)),y,(y+(1-\alpha))]})^{\frac{1}{2}} = (a^{[0,0,0]\oplus[(y-(1-\alpha)),y,(y+(1-\alpha))]})^{\frac{1}{2}} \\
&= a^{\left[\frac{(y-(1-\alpha))}{2},\frac{y}{2},\frac{(y+(1-\alpha))}{2}\right]} \\
d_{A2} &= (a^{[-(y+(1-\alpha)),-y,-(y-(1-\alpha))]} \otimes a^{[0,0,0]})^{\frac{1}{2}} = (a^{[-(y+(1-\alpha)),-y,-(y-(1-\alpha))]\oplus[0,0,0]})^{\frac{1}{2}} \\
&= a^{\left[\frac{-(y+(1-\alpha))}{2},-\frac{y}{2},\frac{-(y-(1-\alpha))}{2}\right]}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

次に，各行 d_{A1}，d_{A2}の演算結果をその総和で割ることでウェイト Wd_{A1}，Wd_{A2}を求める．

$$
\begin{aligned}
Wd_{A1} &= \left[\frac{a^{\frac{(y-(1-\alpha))}{2}}}{a^{\frac{(y+(1-\alpha))}{2}}+a^{\frac{-(y-(1-\alpha))}{2}}},\frac{a^{\frac{y}{2}}}{a^{\frac{y}{2}}+a^{\frac{-y}{2}}},\frac{a^{\frac{(y+(1-\alpha))}{2}}}{a^{(\frac{(y-(1-\alpha))}{2}}+a^{\frac{-(y+(1-\alpha))}{2}}}\right] \\
Wd_{A2} &= \left[\frac{a^{\frac{-(y+(1-\alpha))}{2}}}{a^{\frac{(y+(1-\alpha))}{2}}+a^{\frac{-(y-(1-\alpha))}{2}}},\frac{a^{\frac{-y}{2}}}{a^{\frac{y}{2}}+a^{\frac{-y}{2}}},\frac{a^{\frac{-(y-(1-\alpha))}{2}}}{a^{\frac{(y-(1-\alpha))}{2}}+a^{\frac{-(y+(1-\alpha))}{2}}}\right]
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

したがって，式（3.6）は評価基準 A による代替案 P のウェイト Wd_{A1}と代替案 Q のウェイト Wd_{A2}となる．

次に表３-３の評価基準 B による代替案 P，代替案 Q の評価として一対比較行列 D_B を評価基準と同様に幾何平均法による演算を行う．

$$
D_B = \begin{bmatrix} a^{[0,0,0]} & a^{[(k-(1-\alpha)),k,(k+(1-\alpha))]} \\ a^{[-(k+(1-\alpha)),-k,-(k-(1-\alpha))]} & a^{[0,0,0]} \end{bmatrix}
\tag{3.7}
$$

まず，D_B の各行を d_{B1}，d_{B2}として，各々の幾何平均を求める．

$$
\begin{aligned}
d_{B1} &= (a^{[0,0,0]} \otimes a^{[(k-(1-\alpha)),k,(k+(1-\alpha))]})^{\frac{1}{2}} = (a^{[0,0,0]\oplus[(k-(1-\alpha)),k,(k+(1-\alpha))]})^{\frac{1}{2}} \\
&= a^{\left[\frac{(k-(1-\alpha))}{2},\frac{k}{2},\frac{(k+(1-\alpha))}{2}\right]} \\
d_{B2} &= (a^{[-(k+(1-\alpha)),-k,-(k-(1-\alpha))]} \otimes a^{[0,0,0]})^{\frac{1}{2}} = (a^{[-(k+(1-\alpha)),-k,-(k-(1-\alpha))]\oplus[0,0,0]})^{\frac{1}{2}} \\
&= a^{\left[\frac{-(k+(1-\alpha))}{2},-\frac{k}{2},\frac{-(k-(1-\alpha))}{2}\right]}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

つぎに，各行 d_{B1}, d_{B2}の演算結果をその総和で割ることでウェイト Wd_{B1}, Wd_{B2}を求める．

$$
\begin{aligned}
Wd_{B1} &= \left[\frac{a^{\frac{(k-(1-\alpha))}{2}}}{a^{\frac{(k+(1-\alpha))}{2}}+a^{\frac{-(k-(1-\alpha))}{2}}}, \frac{a^{\frac{k}{2}}}{a^{\frac{k}{2}}+a^{\frac{-k}{2}}}, \frac{a^{\frac{(k+(1-\alpha))}{2}}}{a^{\frac{(k-(1-\alpha))}{2}}+a^{\frac{-(k+(1-\alpha))}{2}}} \right] \\
Wd_{B2} &= \left[\frac{a^{\frac{-(k+(1-\alpha))}{2}}}{a^{\frac{(k+(1-\alpha))}{2}}+a^{\frac{-(k-(1-\alpha))}{2}}}, \frac{a^{\frac{-k}{2}}}{a^{\frac{k}{2}}+a^{\frac{-k}{2}}}, \frac{a^{\frac{-(k-(1-\alpha))}{2}}}{a^{\frac{(k-(1-\alpha))}{2}}+a^{\frac{-(k+(1-\alpha))}{2}}} \right]
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

したがって，式（3.9）を評価基準Ｂによる代替案Ｐのウェイト Wd_{B1}と代替案Ｑのウェイト Wd_{B2}となる．

最後に各評価のウェイト Wh_1，Wh_2，Wd_{A1}，Wd_{A2}，Wd_{B1}，Wd_{B2}を用いて，総合評価 SW の演算を行う．評価基準のウェイト Wh_1，Wh_2と各代替案のウェイト Wd_{A1}，Wd_{A2}，Wd_{B1}，Wd_{B2}を行列演算することで代替案P，代替案Ｑの総合評価 SW（代替案Ｐの総合評価 SW_p，代替案Ｑの総合評価 SW_Q）を算出する．

$$
SW = \begin{bmatrix} Wd_{A1} & Wd_{B1} \\ Wd_{A2} & Wd_{B2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Wh_1 \\ Wh_2 \end{bmatrix}
\tag{3.10}
$$

$$
\begin{aligned}
SW_p &= (Wd_{A1} \otimes Wh_1) \oplus (Wd_{B1} \otimes Wh_2) \\
SW_Q &= (Wd_{A2} \otimes Wh_1) \oplus (Wd_{B2} \otimes Wh_2)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

ファジィ数 SW_p のメンバーシップ関数の頂点を sw_P とし，ファジィ数 SW_Q のメンバーシップ関数の頂点を sw_Q とする．

［数値計算］

総合評価 SW 式（3.11）に対して $a=1.6$, $y=3$とし，x, y に対して0, 1, 2, 3, 4, 5の代入を行い，メンバーシップ関数の頂点の sw_P と sw_Q 算出結果をまとめた表が表３－４，３－５であり，グラフにしたものが図３－２，３－３である．

表３-４　代替案Ｐの総合評価（sw_P）　$a=1.6$, $y=3$

代替案Ｐ a=1.6　y=3		x					
		0	1	2	3	4	5
k	0	0.65188	0.68693	0.71844	0.74416	0.76355	0.77732
	1	0.70958	0.73131	0.75085	0.76680	0.77883	0.78737
	2	0.76143	0.77120	0.77998	0.78715	0.79256	0.79640
	3	0.80377	0.80377	0.80377	0.80377	0.80377	0.80377
	4	0.83569	0.82832	0.82170	0.81630	0.81222	0.80933
	5	0.85835	0.84576	0.83443	0.82519	0.81822	0.81327

表 3-5　代替案 Q の総合評価（sw_Q）　a =1.6, y = 3

代替案Q a=1.6　y=3		x					
		0	1	2	3	4	5
k	0	0.34812	0.31307	0.28156	0.25584	0.23645	0.22268
	1	0.29042	0.26869	0.24915	0.23320	0.22117	0.21263
	2	0.23857	0.22880	0.22002	0.21285	0.20744	0.20360
	3	0.19623	0.19623	0.19623	0.19623	0.19623	0.19623
	4	0.16431	0.17168	0.17830	0.18370	0.18778	0.19067
	5	0.14165	0.15424	0.16557	0.17481	0.18178	0.18673

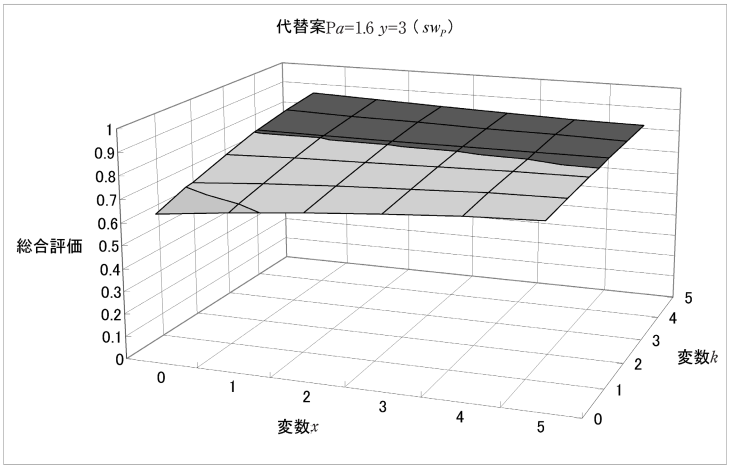

図 3-2　代替案 P の総合評価（sw_P）のグラフ　a =1.6, y = 3

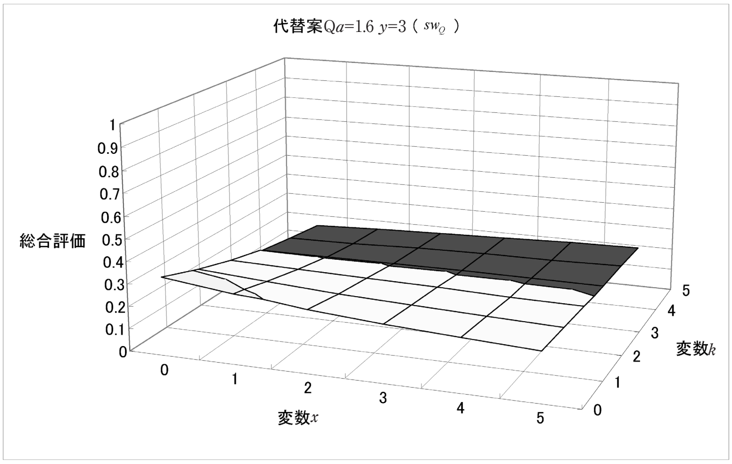

図 3-3　代替案 Q の総合評価（sw_Q）のグラフ　a =1.6, y = 3

４．最適な底 a の選定

ファジィ指数型AHPにおいて底aは重要な役割を果たしている．例えば，a=10とすれば，10^0と10^5は10万倍に極端な拡大を引き起こし，逆に，aを限りなく１に近づければa^0とa^5は，ほぼ等しくなりファジィ数を導入した意味がなくなる．そこで，前章で構築したモデルを活用して，最適な底 a の選定を試みる．最適な底 a とは，被験者が回答する重要度 x, y, k に対して，代替案ＰとＱの有意性を明確に示すことであるために，前章での数値計算した sw_p と sw_Q の差に注目する．$sw_p - sw_Q$ は x, y, k, a の４変数関数で，底 a に関しては単調増加関数である．

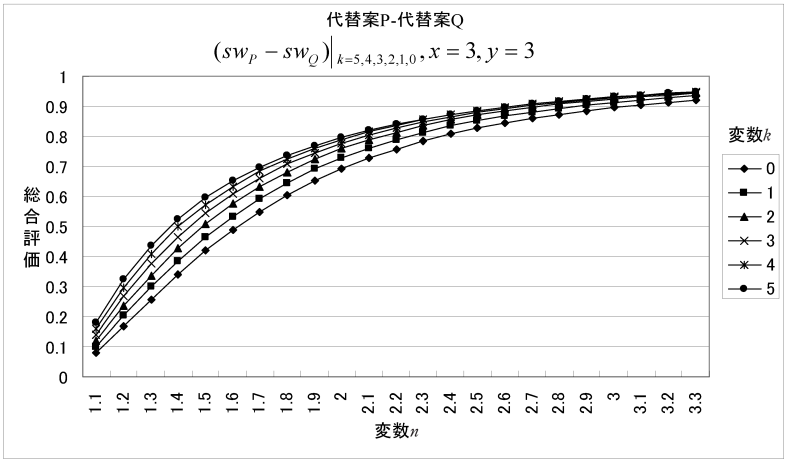

図４-１　代替案Ｐと代替案Ｑの総合評価の差

ここでの最適な a 値とは x, y を固定した場合において，評価基準Ｂにおける代替案ＰとＱの重要度 k に対して，$(sw_P - sw_Q)\big|_{k=5} - (sw_P - sw_Q)\big|_{k=0}$ を最大化するものである．

すなわち，評価基準Ｂを全く考慮しない $k=0$と最大限に効かせた $k=5$との差を大きくすることは，代替案ＰとＱの差を明確に示すことになり，

$$F(a) = (sw_P - sw_Q)\big|_{k=5} - (sw_P - sw_Q)\big|_{k=0} \tag{4.1}$$

とおく．

すべての x, y に対して，これらの差を最大にする a を求めることは困難である為，いくつかの数値例の下で最適な a 値を求める．

［Case Ⅰ］

$x=y=3$　において，

$F(a)$ を最大にする a^* が唯一存在して，
$3a^{*10}-10a^{*5}-10a^{*2}-3=0$ を満たす.
（1＜ a^* ＜2, $a^*=1.3705\cdots$）

［証明］
$x=y=3$　のとき，

$$sw_P=\frac{(a^{\frac{3}{2}})^2}{(a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}})^2}+\frac{a^{\frac{k}{2}}}{a^{\frac{k}{2}}+a^{-\frac{k}{2}}}\times\frac{a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}}$$

$$sw_Q=\frac{1}{(a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}})^2}+\frac{a^{-\frac{k}{2}}}{a^{\frac{k}{2}}+a^{-\frac{k}{2}}}\times\frac{a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}}$$

$a^{\frac{3}{2}}=A$ とおく.

$$(sw_P-sw_Q)=\frac{A^2-1}{(A+A^{-1})^2}+\frac{a^{\frac{k}{2}}-a^{-\frac{k}{2}}}{a^{\frac{k}{2}}+a^{-\frac{k}{2}}}\times\frac{A^{-1}}{A+A^{-1}}$$

$$F(a)=(sw_P-sw_Q)\big|_{k=5}-(sw_P-sw_Q)\big|_{k=0}=\frac{a^{\frac{5}{2}}-a^{-\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}+a^{-\frac{5}{2}}}\times\frac{A^{-1}}{A+A^{-1}}$$

$$=\frac{a^{\frac{5}{2}}-a^{-\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}+a^{-\frac{5}{2}}}\times\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{a^5-1}{a^5+1}\times\frac{1}{a^3+1}=\frac{a^5-1}{(a^5+1)(a^3+1)}$$

$$F'(a) = \frac{5a^4(a^5+1)(a^3+1)-(a^5-1)\left\{5a^4(a^3+1)+(a^5+1)3a^2\right\}}{(a^5+1)^2(a^3+1)^2}$$

$$= \frac{a^2(-3a^{10}+10a^5+10a^2+3)}{(a^5+1)^2(a^3+1)^2},$$

$\dfrac{a^2}{(a^5+1)^2(a^3+1)^2} > 0$ より、

$G(a) = -3a^{10}+10a^5+10a^2+3$ とおく.

$G'(a) = -30a^9+50a^4+20a = a(-30a^8+50a^3+20)$

$a > 0$ より

$K(a) = -3a^8+5a^3+20$　とおく.

$K'(a) = 30a^2(-8a^5+5) = 0$　の解をξとすれば,

$\xi = \sqrt[5]{\dfrac{5}{8}} < 1$

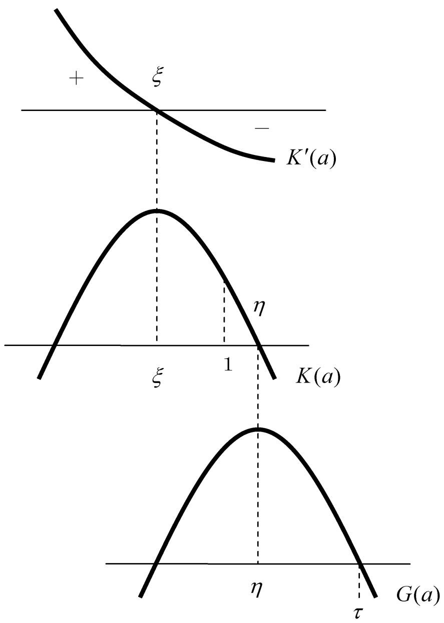

図 4‐2　最適な a 値

$G'(\xi) > 0 \ (\because G'(1) > 0)$ より，
$K(a) = 0$ の解をηとすると，

$$-3\eta^8 + 5\eta^3 + 2 = 0$$
$$-3\eta^{10} = -5\eta^5 - 2\eta^2$$ の関係より，

$$\begin{aligned} G(\eta) &= -3\eta^{10} + 10\eta^5 + 10\eta^2 + 3 \\ &= -5\eta^5 - 2\eta^2 + 10\eta^5 + 10\eta^2 + 3 \\ &= 5\eta^5 + 8\eta^2 + 3 > 0 \end{aligned}$$ が示せる。

また，$\lim_{a \to +\infty} G(a) = -\infty$ より，τ が唯一存在することが示せた．
$F(a)$ を Max にする τ は唯一存在する．
$-3a^{10} + 10a^5 + 10a^2 + 3 = 0$ の解を τ とすれば，
$1 < \tau < 2$

$$\left(\begin{aligned} \because G(1) &= -3 + 10 + 10 + 3 = 20 > 0 \\ G(2) &= -3 \cdot 2^{10} + 10 \cdot 2^5 + 10 \cdot 2^2 + 3 \\ &= -3 \times 1024 + 320 + 40 + 3 < 0 \end{aligned} \right)$$
$\tau \fallingdotseq 1.3705\cdots$

［Case Ⅱ］
$x = 5, y = 0$ において，
$F(a)$ を最大にする a^* が唯一存在して，
$a^* = \sqrt[5]{3} \fallingdotseq 1.245\cdots$となる．

［証明］
$x = 5, y = 0$ のとき，

$$sw_P = \frac{1}{2} \times \frac{a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}} + a^{-\frac{5}{2}}} + \frac{a^{\frac{k}{2}}}{a^{\frac{k}{2}} + a^{-\frac{k}{2}}} \times \frac{a^{-\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}} + a^{-\frac{5}{2}}}$$
$$sw_Q = \frac{1}{2} \times \frac{a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}} + a^{-\frac{5}{2}}} + \frac{a^{-\frac{k}{2}}}{a^{\frac{k}{2}} + a^{-\frac{k}{2}}} \times \frac{a^{-\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}} + a^{-\frac{5}{2}}}$$

$$(sw_P - sw_Q) = \frac{a^{-\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}} + a^{-\frac{5}{2}}} \times \frac{a^{\frac{k}{2}} - a^{-\frac{k}{2}}}{a^{\frac{k}{2}} + a^{-\frac{k}{2}}}$$

$$(sw_P - sw_Q)\big|_{k=5} - (sw_P - sw_Q)\big|_{k=0}$$

$$= \frac{a^{-\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}} + a^{-\frac{5}{2}}} \times \frac{a^{\frac{5}{2}} - a^{-\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}} + a^{-\frac{5}{2}}} = \frac{1}{a^5 + 1} \times \frac{a^5 - 1}{a^5 + 1}$$

$$= \frac{a^5 - 1}{(a^5 + 1)^2}$$

$a^5 = x$ とおく.

$$f(x) = \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - (x-1)\cdot 2 \cdot (x+1)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{3 - x}{(x+1)^3}$$

$$\therefore a^5 = 3$$
$$a = 3^{\frac{1}{5}} = 1.245\cdots$$

［Case Ⅲ］

$x = 5, y = 3$ において,

$F(a)$ を最大にする a^* が唯一存在して,

$a^* = \sqrt[5]{3}$ となる.

［証明］

$x=5, y=3$ のとき，

$$sw_p=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}}\times\frac{a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}+a^{-\frac{5}{2}}}+\frac{a^{\frac{k}{2}}}{a^{\frac{k}{2}}+a^{-\frac{k}{2}}}\times\frac{a^{-\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}+a^{-\frac{5}{2}}}$$

$$sw_Q=\frac{a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}}\times\frac{a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}+a^{-\frac{5}{2}}}+\frac{a^{-\frac{k}{2}}}{a^{\frac{k}{2}}+a^{-\frac{k}{2}}}\times\frac{a^{-\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}+a^{-\frac{5}{2}}}$$

$$(sw_P-sw_Q)=\frac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}}\times\frac{a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}+a^{-\frac{5}{2}}}+\frac{a^{\frac{k}{2}}-a^{-\frac{k}{2}}}{a^{\frac{k}{2}}+a^{-\frac{k}{2}}}\times\frac{a^{-\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}+a^{-\frac{5}{2}}}$$

$$(sw_P-sw_Q)\Big|_{k=5}-(sw_P-sw_Q)\Big|_{k=0}$$

$$=\frac{a^{\frac{5}{2}}-a^{-\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}+a^{-\frac{5}{2}}}\times\frac{a^{-\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}+a^{-\frac{5}{2}}}=\frac{a^5-1}{(a^5+1)^2}$$

$x=5, y=0$ の場合（Case Ⅱ）と同じとなる．

$$\therefore a^5=3$$
$$a=3^{\frac{1}{5}}=1.245\cdots$$

以上，［Case Ⅰ］［Case Ⅱ］［Case Ⅲ］より，最適な a 値は１.３前後にあると言ってよいことがわかった．

６．α カットにおける最適な α の選定

意思決定者にとっては，代替案 P と Q の優劣を明確に示してもらいたい．AHP の意思決定構造では様々な演算を行うために代替案 P，Q の総合評価のメンバーシップ関数には重なりが生じる．特に α（重要度）が低いときには，大半の部分で重なりを生じ，代替案 P，Q の優劣を決定することが困難となる．逆に α を大きくして，１に近づければ重なりは完全に解消されるが，１点に近づきファジィ数を導入した意味が消滅する．

総合評価 SW 式（３.11）に対して a=1.2～1.6とし，x=1, y=1, k=1としたメンバーシップ関数が図６－１である．この数値例は代替案 P が Q に比べて，やや優位である状況での各 a に対するメンバーシップ関数を示したものである．

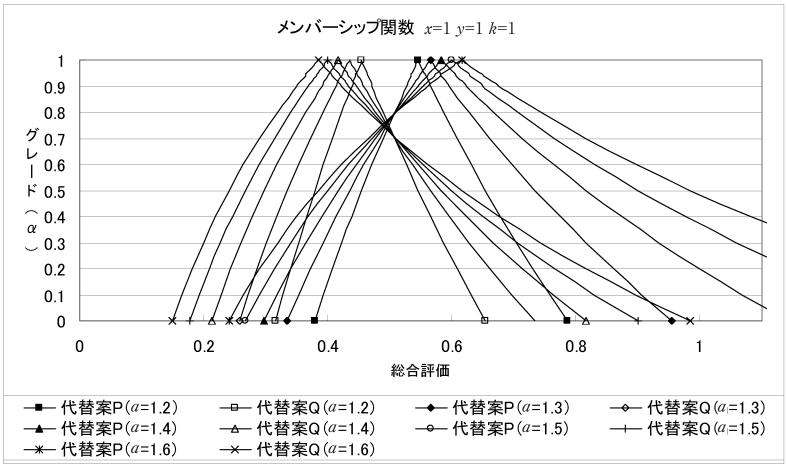

図６－１　総合評価　x=1, y=1, k=1

総合評価SW式（3.11）に対してa=1.2～1.6とし，x=3, y=3, k=3は，代替案ＰがＱに比べて，優位に設定されているためにメンバーシップ関数の重なりは，わずかである．図６－１では，α =0.75付近で重なりを生じていたが，図６－２では，α =0.25付近まで低下している．

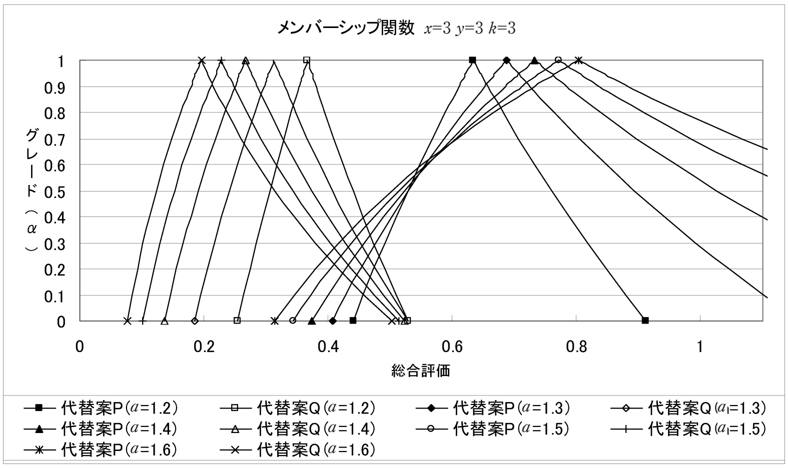

図 ６－２　総合評価　x=3, y=3, k=3

図６－１と図６－２において注目した，各aでの代替案ＰとＱのメンバーシップ関数が交わる点だけを取り出し，様々なx, y, kに対してシミュレーションを行った．その分析結果より，次の様な３つのパターンがあることがわかった．そして最適なα値としては0.7

程度をとればすべての場合において重なりを持たずに有効な判定が行えることがわかった.

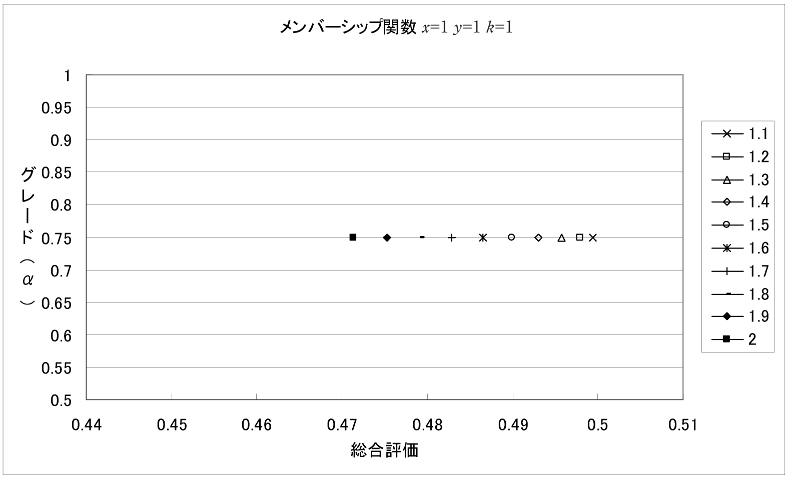

図 6-3　代替案 P と代替案 Q の総合評価の交点　x=1, y=1, k=1

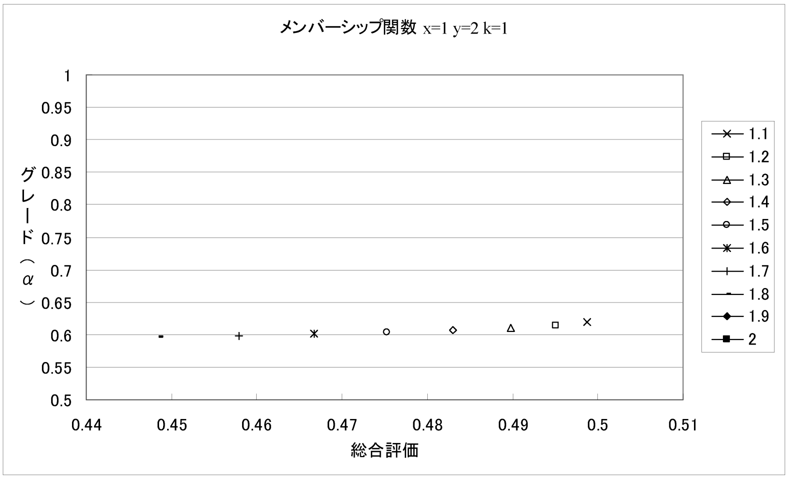

図 6-4　代替案 P と代替案 Q の総合評価の交点　x=1, y=2, k=1

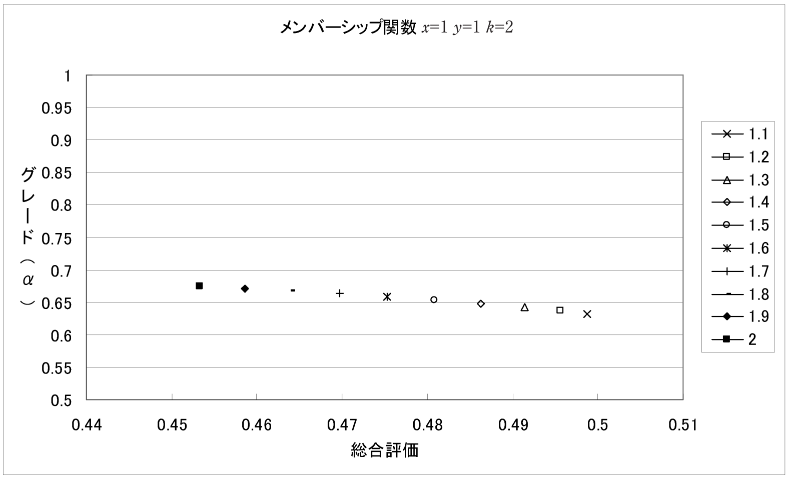

図６-５　代替案Ｐと代替案Ｑの総合評価の交点　x=1, y=1, k=2

７．おわりに

本研究では，提案する一対比較値 $\underset{\sim}{a}_{ij}^{n}$（$\underset{\sim}{n}=0,\underset{\sim}{1},\underset{\sim}{2},\underset{\sim}{3},\underset{\sim}{4},\underset{\sim}{5}$）を用いるファジィ指数型AHPによる，ファジィ指数を用いる一対比較値の考察を行った．まず，シンプルモデルの構築として，問題をシンプルな形にして検討を行った．これは a 値の変化を考察しやすくしたためであるが, a 値におけるある程度の方向性を検討することができた．次に，ファジィ指数型AHPで導き出される総合評価の結果に対して用いる最適な α 値のシミュレーションを試み，その結果から最適な α 値と交点の傾向を考察した．指数型ファジィ数と α カットに関する論文は多数あるが，底 a と α に関する分析を行った論文はないことにより本研究の意義は深いと考える．

今後の課題として，図６-３～６-５で見られた交点の軌跡がどのような条件下で３つのパターンに分かれるかを分析して行きたい．

参考引用文献

[1] T.L.Saaty：The Analytic Hierarchy Process，McGraw-Hill，1980

[2] 木下栄蔵：AHP入門―決断と合意形成のテクニック―，日科技連出版社，2000

[3] J.J.Buckley：Fuzzy Hierarchical Analysis，Fuzzy Sets and Systems，Vol.17，pp.233-247，1985

[4] 円谷友英，杉原一臣，田中英夫：QPによる区間AHPの定式化，日本知能情報ファジィ学会第20回ファジィシステムシンポジウム講演論文集，pp.503-504，2004 pp.505-506，2004

[5] 大西真一，D.Dubois，H.Prade，山ノ井高洋：ファジィ逆行列を用いたAHPの整合度とウェイトについて，日本知能情報ファジィ学会第20回ファジィシステムシンポジウム講演論文集，pp.505-506，2004

[6] 高萩栄一郎：一対比較法を利用したファジィ積分の入力値の固定，日本知能情報ファジィ学会第20回ファジィシステムシンポジウム講演論文集，pp.703-706，2004

[7] 大西真一，山ノ井高洋，今井英幸：内部従属AHPにおけるウェイト表現について，日本知能情

報ファジィ学会第26回ファジィシステムシンポジウム講演論文集，pp.57-58，2010
[8] 増田達也，中村泰，夜久正司：指数型ファジィ一対比較値を用いた AHP の相対的重要度の導出法，電子情報通信学会論文誌，Vol. J75-A，No.3，pp. 646-650，1992
[9] 倉重賢治，亀山嘉正，宮﨑茂次：AHP における対数型ファジィ数を用いた相対的重要度決定法，日本経営工学会論文誌，Vol.50，No.4，pp.216-225，1999
[10] 小谷直也，古殿幸雄：ファジィ一対比較値の提案とその実証的実験，日本知能情報ファジィ学会第21回ファジィシステムシンポジウム講演論文集，pp.15-18，2005
[11] 小谷直也，古殿幸雄：一対比較値のスケール変化に伴う実験的考察，日本知能情報ファジィ学会ソフトサイエンス研究会第16回ソフトサイエンス・ワークショップ講演論文集，pp.94-95，2006
[12] 小谷直也，古殿幸雄：ファジィ指数型 AHP に用いるウェイト推定法の考察，日本知能情報ファジィ学会第24回ファジィシステムシンポジウム講演論文集，pp. 72-75，2008
[13] Arnold Kaufmann, Madan M.Gupta, 田中英夫（監訳），松岡浩（訳）『ファジィ数理と応用』オーム社，1992