

ファジィ C P M

韓 尚 秀*¹ 蘇 瑛 琳*²

Fuzzy Critical Path Method

Sangsu HAN*¹ Yinglin SU*²

Abstract

Until now, some project scheduling problems have concentrated on minimizing make-span with a fixed task processing time. However in real life, the processing time may be indeterminate, such as in tasks of Theory of Constraints (TOC) scheduling. The TOC Scheduling points out the reason of indeterminate processing time by prolongation of start point of tasks, overestimation of processing time, close door of completion of tasks etc.

This indeterminate time can be cut by about 50%, and the saved time used as a buffer to protect the critical schedule and the project.

In this research, processing times were treated with decision variables formulated according to the satisfaction level function of fuzzy theory, with a focus on scheduling to maximize the satisfaction level of the decision maker with respect to completion time. A project scheduling problem with a fuzzy processing time is considered, and an efficient algorithm based on ordinary critical path method is proposed and its validity discussed.

Keywords

Theory of Constraints, Fuzzy processing time,
Critical path method, Project scheduling

1. はじめに

SCM (Supply Chain Management) とは、企業活動の管理手法の一であり、取引先との間の受発注、資材の調達から在庫管理、製品の配送まで、いわば事業活動の川上から川下までをコンピュータを使って総合的に管理することで余分な在庫などを削減し、コストを引き下げる効果があるとされる。SCM の重要理論である TOC (Theory Of Constraints) は、イスラエルの物理学者エリヤフ・M・ゴールドラット博士が1980年代にアメリカで提唱した生

* 1 はん さんすう：大阪国際大学現代社会学部准教授 (2008.6.24受理)

* 2 そう えいりん：日中経済貿易センター

産スケジュールリングをベースとした経営手法である。「工場の生産性は制約条件工程の能力以上には絶対に向上しない」という原理をもとに、制約条件工程の生産量と資材調達を同期化させる仕組み（ドラム・バッファ・ロープ）により、生産性が飛躍的に高まり、在庫・仕掛が劇的に減少するということを実証させ、これを制約条件の理論と名付ける。企業・組織（システム）の目的（ゴール）達成を阻害する制約条件（ボトルネック）を見つけ、それを集中的に改善し、成果を上げていく手法がTOCである（1、2、4）。

本研究では、TOCにおける制約条件の見つけ方及び活用法による効果に着目し、日程計画問題を取り上げ、その効果を考察する。その後、安全余裕をムダにするしくみ、「学生症候群」、マルチタスク等の結果生じる曖昧な作業時間を一律短く見積もって日程を早める従来のTOC日程計画の問題点を指摘し、その解決方法を考察する。

研究の目的は、曖昧な作業時間のもつ日程計画問題を取り上げ、ファジィ理論（Fuzzy Theory）の成果である満足度関数（Satisfaction Level Function）を用いてその作業時間を数量化し、満足度の犠牲を最小に抑えながら日程を早める「ファジィCPM（Fuzzy Critical Path Method）」という手法を提案することである。提案する手法の有効性、計算の難しさについて具体例を取り上げ、数値例を用いて説明する。

2. 準備

2. 1. 曖昧な作業時間

一般的には、TOC日程計画では、プロジェクトの所要時間の延長や完了予定日からの遅延現象から、下記のように作業の遅延理由としての人間心理要素が挙げられる。

- (1) 安全余裕をムダにするしくみ：納期遅れのみが伝播し、早まった分は決して伝播しない。
- (2) 「学生症候群」：ぎりぎり納期が近づかないと作業をスタートさせない癖がある。
- (3) マルチタスク：あてにされやすい人物は複数のプロジェクトを掛け待ちでやらざるをえなくなる。

以上のような人間心理要素によるプロジェクトの所要時間を見ると、プロジェクトの開始時刻から、終了時刻までの確率は、非常に β 分布と似ており、TOCでは β 分布を仮定し、一律ある確率以下で曖昧な所要時間を数量化している。

満足度は、経済学では効用と呼び、 $z=U(x)$ で表すことがある。この関数の性質を用いて曖昧な作業時間を表現してみると、右図のように、会社の意思決定者である社長と実務担当従業員の満足度として図1と図2で表せる。

図1は厳しい社長の満足度であり、決まっている完了時刻 d を超えると、満足度0になり、怒ってしまう。図2は、やさしい社長であり、そのプロジェクトの完了時刻 d を超えると、やや不満足で、 e 時刻を超えると、怒ってくるタイプである。

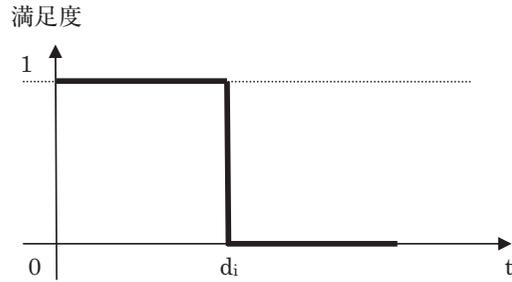


図1. 厳しい社長の満足度

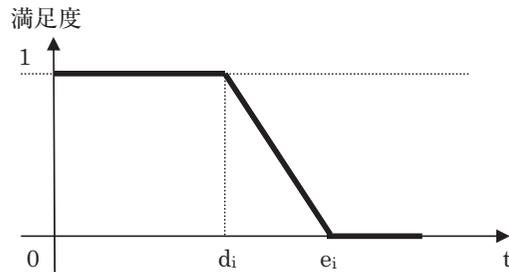


図2. やさしい社長の満足度

次に考えるべき問題は意思決定の公平性で、従業員の満足度と社長の満足度の相違である。プロジェクトにおいて、社長から作業時間を一定の値として与えられるが、実際には現場の状況によって確実な値は分からないことが多い。そこで作業時間を従業員が見積もると、図3の三角型 β 分布に近似できる。一般にTFN (Triangular Fuzzy Number) とよばれる。この2つの満足度関数(台型:社長、三角型:従業員)の交わる面積にもとづく意思決定が公平さにつながる。

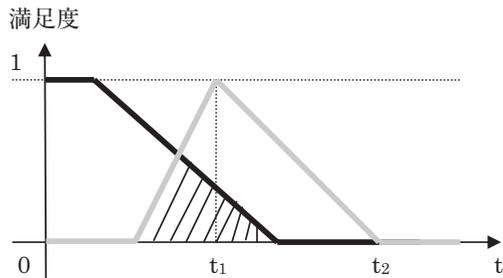


図3. 一致指数

図4は、図3で三角型で示した、従業員の満足度関数を台型にかえたものを示す。作業の完了がおそくなればなるほど満足する従業員のきもちを表わす。

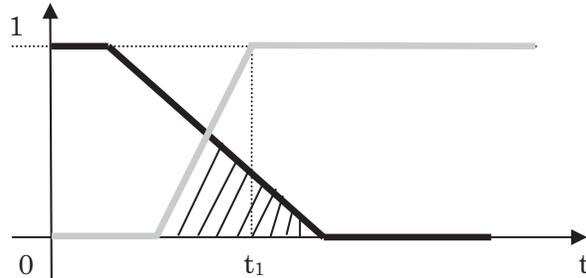


図4. 一致指数

3. 従来のCPM

プロジェクト管理の調整手法であるCPMによってプロジェクト全体の費用を考える場合、個々の作業の費用が所有時間といかなる関係にあるかを明らかにしておかなければならない。一般に所要時間を縮めるにはなんらかの余分な費用が必要となり、その間の関係は作業の性質によっていろいろ変わる。また設備台数を増やすというような場合は、1台、2台というように整数倍に費用を増やさなければならないことも多い。

しかし、CPMでは問題を簡単にするため、費用と所要時間の間に直線的な関係があることを仮定する。

各作業 (i,j) には標準所要時間 D_{ij} と、特急所要時間 d_{ij} がある (実際の所要時間 y_{ij} は D_{ij} より長くなることはできるが、 d_{ij} より短くなることはできない)。次に標準所要時間で作業する場合の費用を M_{ij} 、特急所要時間で作業する場合の費用を m_{ij} とおき、点 (d_{ij}, m_{ij}) と点 (D_{ij}, M_{ij}) を結ぶ直線によって費用曲線を定義する (図5)。

数式で示せば、所要時間 y_{ij} は

$$d_{ij} \leq y_{ij} \leq D_{ij}$$

をみたし、その費用は

$$Z_{ij} = -C_{ij}y_{ij} + R_{ij}$$

で示される。ただし

$$C_{ij} = (m_{ij} - M_{ij}) / (D_{ij} - d_{ij})$$

$$R_{ij} = (m_{ij}d_{ij} - M_{ij}D_{ij}) / (D_{ij} - d_{ij})$$

である。

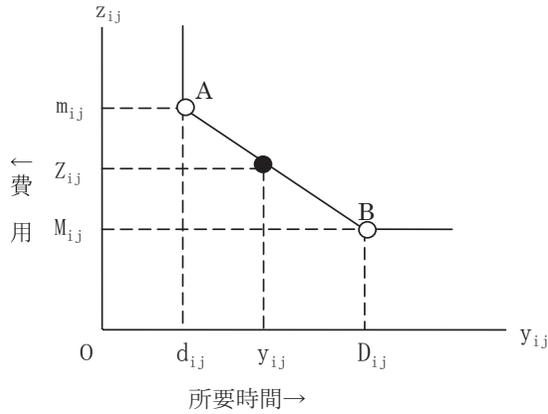


図5. 費用曲線

この式で C_{ij} は、この直線の勾配と呼ばれる。この作業の所要時間を単位時間短縮しうるのに必要な費用を示している。

実際の所要時間 y_{ij} は、 D_{ij} より長くなってもよいが d_{ij} より短くはなれないが、図5で示すように、 D_{ij} より長い時間をかけても費用はいっこうに安くならず、 d_{ij} より短くすることは不可能で、それ以下では費用が無限大になってしまうものとする。

作業によっては、その所要時間が一定不変で、変えられないものがある。すなわち $D_{ij} = d_{ij}$ である。この場合には費用勾配が決められないが、日程の短縮という立場からは、特急所要時間まで縮めた状態と同じであるから、それ以上所要時間を縮められない。すなわち費用勾配が無限大であると考えればよい。

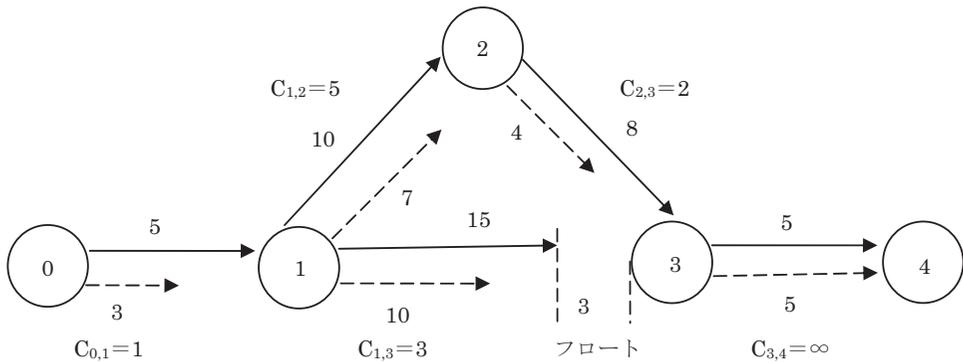


図6. 並行作業のついたアロー・ダイアグラム

このプロジェクトの作業リストは次表1のとおりである。 M_{ij} , m_{ij} は省略してすでに C_{ij} が計算されているものとして示してある。*印のついた作業(1,3)が並行作業として表に追

表1. 図の作業リスト

| i | j | D_{ij} | d_{ij} | C_{ij} | 初めの費用 |
|----|---|----------|----------|----------|--------------------------|
| 0 | 1 | 5 (日) | 3 (日) | 1 (万円/日) | ΣM_{ij} 100万円 |
| 1 | 2 | 10 | 7 | 5 | |
| *1 | 3 | 15 | 10 | 3 | |
| 2 | 3 | 8 | 4 | 2 | |
| 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | |

加されただけで、他は全く図6と同じアロー・ダイアグラムである。作業(1,3)は3日のフロートがあるからクリティカル・パス(CP)は①→②→③→④である。まず作業(0,1)が短縮されるが、これには並行作業は関係ないから、特急所要時間までそのまま短縮できる。次に、作業(2,3)の短縮であるが、今度は並行作業(1,3)があるから、(2,3)が短縮されるとともに、(1,3)のフロートも同じ大きさだけ減少していく。(2,3)の特急作業時間までの余裕は4日、(1,3)のフロートは3日があるから、(1,3)のフロートが先になくなるはずである。(2,3)の作業時間が3日縮められて5日になったとき、(1,3)は15日間びったりとなって、これもクリティカル・パスに転化する。このときのプロジェクトの状況をアロー・ダイアグラムに書くと、図7のようになる。ここではプロジェクト遂行時間5日短縮されて23日、費用は108万円となっている。

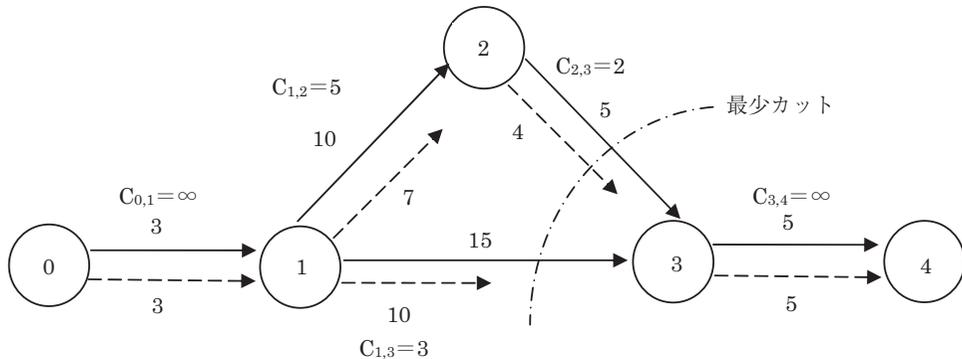


図7. 2本のクリティカル・パスが生じたとき

この状態からさらにプロジェクトを縮めようとする場合、考えられる縮め方を全部列挙すると次の4とおりになる。

- 1組 (0,1)
- 2組 (1,2) と (1,3)
- 3組 (2,3) と (1,3)
- 4組 (0,1)

実はこの1組と4組はもう特急所要時間になっているから短縮不可能なのだが、この場合

も費用勾配が無限大であるとして同一に扱うほうが便利である。

それぞれの組を1日だけ縮めるために必要な費用は

- 1組 $C_{0,1} = \infty$
- 2組 $C_{1,2} + C_{1,3} = 5 + 3 = 8$ 万円/日
- 3組 $C_{2,3} + C_{1,3} = 2 + 3 = 5$ 万円/日
- 4組 $C_{3,4} = \infty$

となる。したがって3組を縮めるのが最も安上りの短縮法である。上に並べたようなプロジェクトの長さが短縮できる作業の組合せをCPMではカットと名づけており、そのうち費用の一番安いカットを最小カット(図7)と呼んでいる。*

これで3組を縮めるのが最も有利なことは分かる。図7を見ればすぐ分かることだが、特急所要時間までの余裕は作業(2,3)が1日、(1,3)が5日ある。したがって、1日縮めれば作業(2,3)はもう縮めることができない。すなわち費用勾配が無限大に転化してしまう。その段階ではあらためて最小カットを捜さなくてはならない。プロジェクト遂行時間は1日減少して22日に、費用は5万円/日×1日=5万円増加して113万円となる。

次は前の2組に相当する(1,2)と(1,3)の組合せが最小カットになり、作業(1,2)が特急所要時間の7日になるまで、3日間縮めることができる。このときのアロー・ダイアグラムを図8に示す。

*図8のアロー・ダイアグラムには、最小カットの作業に交差する一点破線を書き入れてある。この

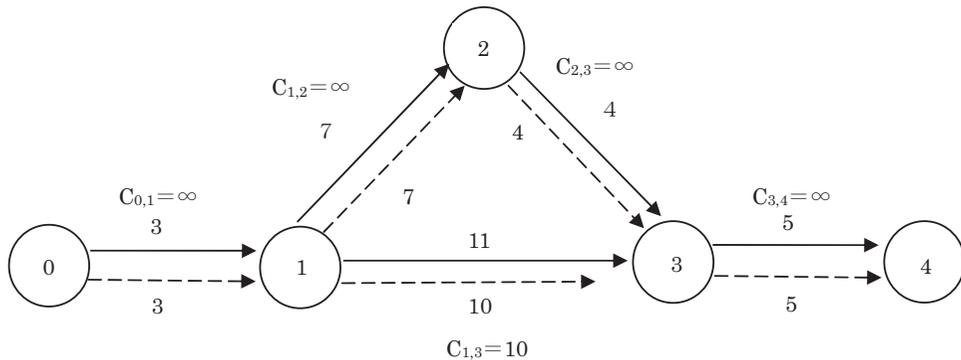


図8. 最も短縮されたときのアロー・ダイアグラム

破線によってネットワークは2つの部分に切断され、かつ出発結合点①と終点結合点④がそれぞれ両方の部分に分割されている。カットの名称はここからつけられたものである。カットに属する作業を同時に同じ長さだけ短縮すれば、プロジェクト全体がそれぞれ短くなる。

この段階で各カットの費用勾配を計算してみると

- 1組 $C_{0,1} = \infty$
- 2組 $C_{1,2} + C_{1,3} = \infty + 3 = \infty$
- 3組 $C_{2,3} + C_{1,3} = \infty + 3 = \infty$
- 4組 $C_{3,4} = \infty$

となり、すべてが無限大、すなわちこれ以上短縮できないことを示している。

このことは図上では特急所要時間で実施する作業だけからなるクリティカル・パス①→①→②→③→④ができたことを意味している。この場合、作業(1,3)は特急所要時間に対してはまだ1日の余裕が残っているが、これを縮めても全体の長さには影響がない。このときのプロジェクト遂行時間は、全部の作業を特急作業時間 d_{ij} で実施したときのプロジェクト遂行時間に等しい。いままでの各段階をまとめてプロジェクト費用曲線を書くと図9が得られる。プロジェクト費用曲線が各段階の切れ目を頂点とする折線となり、かつ下に凸な減少関数となることは、以上のプロジェクト費用曲線の作り方からも、またその意味からも明らかと考える。

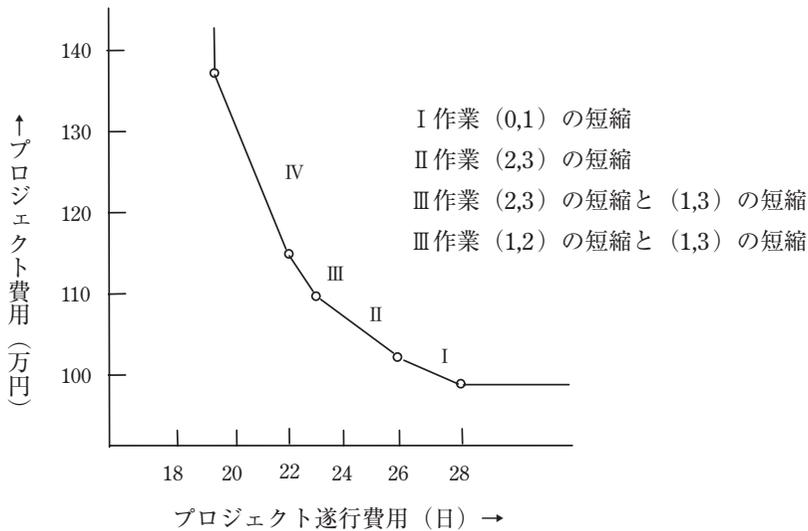


図9. プロジェクト費用曲線

4. ファジィ処理時間をもつプロジェクトスケジューリング問題

4. 1 あいまいな作業時間の定式化

ここでは、CPMにおける単位コストのかわりに単位満足度という概念を導入する。

表2. 単位満足度 μ_{ij}

| i | j | D_{ij} | d_{ij} | μ_{ij} |
|---|---|----------|----------|------------|
| 0 | 1 | 5 (日) | 3 (日) | 1/2 |
| 1 | 2 | 10 | 7 | 1/3 |
| 2 | 3 | 8 | 4 | 1/4 |
| 3 | 4 | 5 | 5 | 1 |

表2の時間に対する満足度関数 μ_{ij} を下記の図10で表わす。

たとえば、作業(0,1)の場合、作業時間 y_{01} がのびると満足度 μ_{01} があがっていく様子を
示す。3日より2日分のびると満足度は0より1まであがり、その関数の勾配で単位満足
度を定義する。

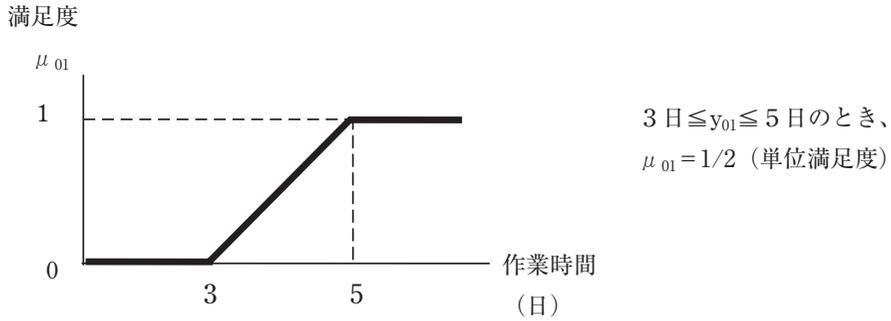


図10. 作業(0,1)の時間に対する満足度関数

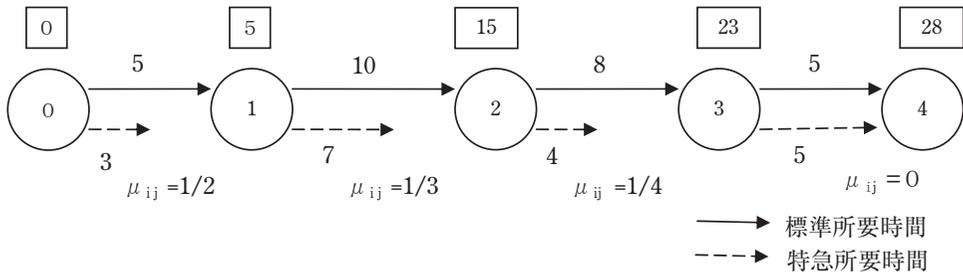


図11. 一本道のアロー・ダイアグラム

図11は5つの作業からなるプロジェクトを単位満足度付アロー・ダイアグラムで表わした
ものである。

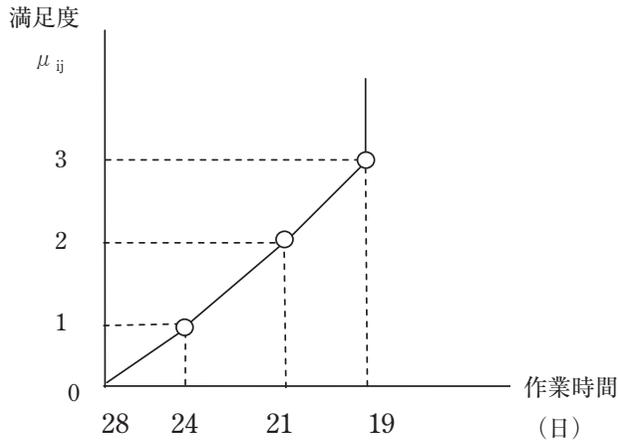


図12. 合計満足度関数

図12は作業時間に対する合計満足度を示す。計算は従来のCPMによる。

4. 2 時間に対する満足度関数の可能性 (possibility) μ_{ij}

この節では、PERTにおける作業時間が特急時間と標準時間に分かれており、特急時間はいくらお金を掛けても、資源を投入しても時間の短縮ができない作業として捉える。これによって、社長の満足度関数は図13のように三角型の満足度関数として特徴づけられる。つまり、作業時間が決まれば、三角型満足度関数と交わる交差点から一意的に満足度がきまる。これを、ファジィ理論では可能性とも呼んでいる。

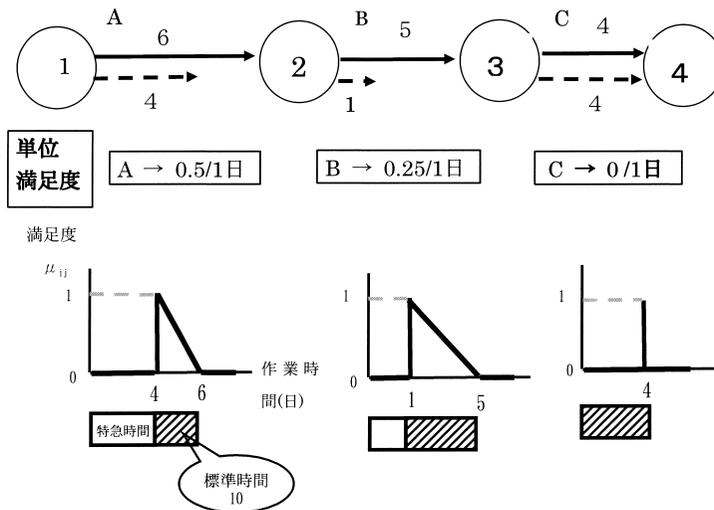


図13. 時間に対する満足度関数の可能性

左記の図で、社長が3つの作業A、B、Cからなるプロジェクトを管理している。作業Aは作業時間で6日をかかれば、完成できる。この6日の作業時間は標準時間という。しかし、社長の立場から考えるともう少し早めに完成したければ、作業Aは一生懸命頑張って処理しても4日はかかる。これを特急時間という。

次に、作業Bは標準時間で5日をかかり、特急時間では1日だけで完成できる。勿論、時間短縮にはお金や資源がかかるから満足度は下がる。1日短縮するのに下がる満足度（可能性）を単位満足度と呼ぶことにする。ここまでに、作業A、Bの曖昧な処理時間をやさしい社長が決めるならば、図6の満足度関数と同じタイプになるが、作業を特急時間より短くできないために、図13のような三角形の満足度関数になることに注意する。

ただし、作業Cはどんなに頑張っても作業時間が4日のかかるとすれば、ファジィ満足度関数の厳しい社長と同じタイプである。

図13の単位満足度では、作業Aの作業時間を1日に減らすと満足度が0.5にアップする。作業Bの作業時間は1日を減らすと満足度が0.25にアップする。作業Cの作業時間を1日に減らすと満足度は0.1にアップする。従って、単位満足度が少ない作業から順次的に標準処理時間から特急時間まで減らしていくことが、プロジェクト全体の観点から見ると満足度の犠牲を最小限度に減らすことができる。従来のCPMの手法を適用することによって、より複雑なPERTネットワークとして表現される問題を解決することができる。

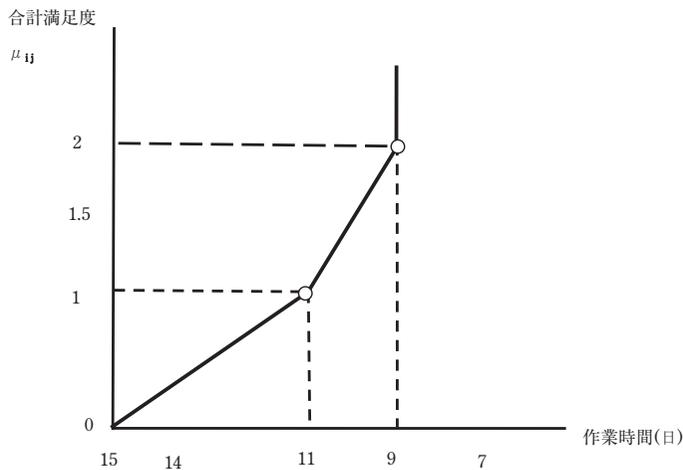


図14. 合計満足度関数

上記の単位満足度（図13）を用い、合計満足度関数で表現してみたら、作業時間をだんだん縮めていくと満足度の累積合計は大きくなるが、満足度の犠牲量が少ない作業から時間を減らしていく様子が見える。（図14）

例えば、単位満足度の昇順で、先の（図13）で作業Aの標準時間（6日）+作業Bの標準時間（5日）+作業Cの標準時間（4日）=合計標準時間は15日である。

この中に、Cではどうしても減らせないので、満足度は変化はない。そして、作業Bの標準時間を5日から4日を減らしてみたら、特急時間内で工程が完成できて満足度が1に上がる。次に、作業Aは標準時間で6日から特急時間まで2日減らせるので、2日を減らして特急時間内で完成すれば満足度は1にアップする。

4. 3 時間に対する満足度関数の一致指数 (Agreement Index) μ_{ij}

前節では、社長の満足度関数と社員の満足度関数の交差点から満足度(可能性)を考え、単位満足度を計算したが、本節ではより正確な情報を取り扱うために、両者の満足度関数が交わる面積を考える。

4. 3. 1 優しい社長と厳しい社員の一致指数

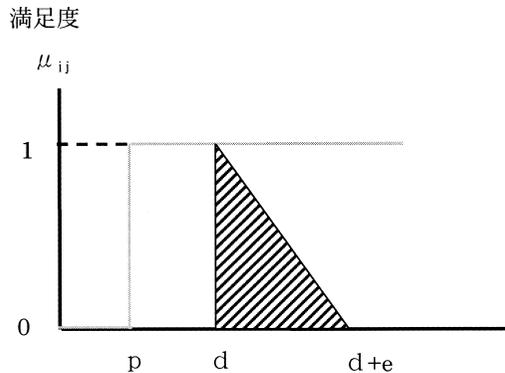


図15. $p \leq d$ の時の作業時間

図15は、社長の作業時間より、社員の時間が小さい場合を説明している。意思決定者の社長が提案する実際作業時間はdで作業時間が決まる。

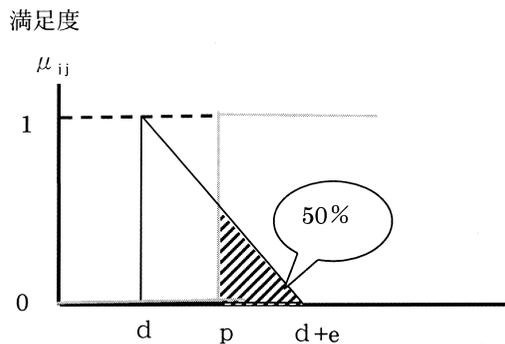


図16. $d \leq p \leq d+e$ の時の作業時間

図16は、社長の作業時間と社員の時間が交わる場合を説明している。意思決定者の社長が提案する実際作業時間は標準作業時間の50%を引かれた時間で作業時間が決まる。

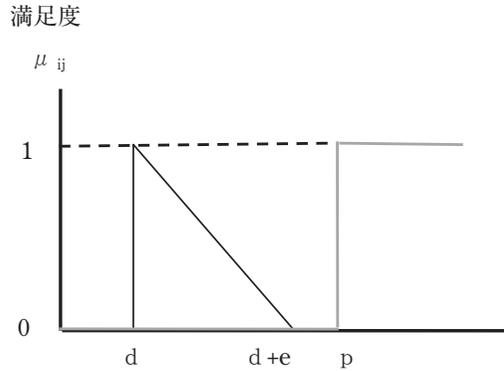


図17. $D+e \leq p$ の時の作業時間

図17は、社長の作業時間より、社員の時間が大きい場合を説明している。意思決定者の社長が提案する実際作業時間はdで作業時間が決まる。

4. 3. 2 優しい社長と優しい社員の一致指数

優しい社長と社員の場合でも 4. 3. 1と同じ議論ができるが、図14の合計満足度関数が線形にならないことに注意すべきである。これは今後の課題に残したい。

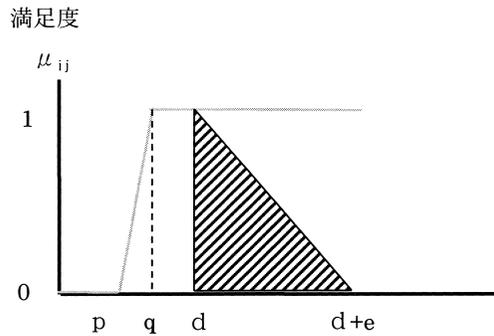


図18. $q \leq d$

滿足度

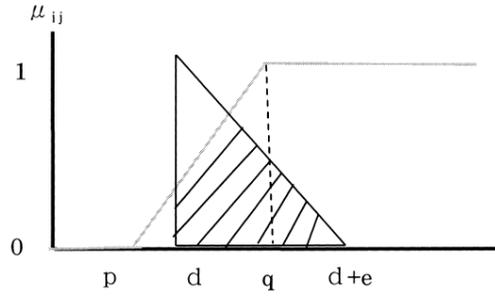


圖19. $p \leq d, d \leq q$

滿足度

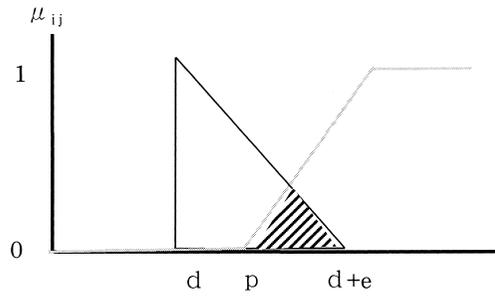


圖20. $d \leq p \leq d+e$

滿足度

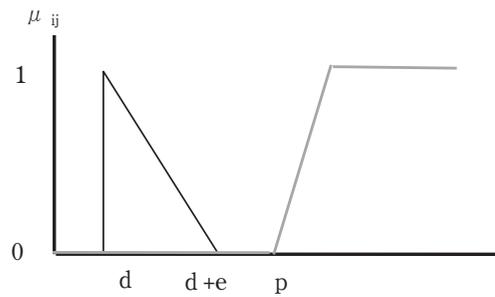


圖21. $d+e \leq p$

検証の最初の段階として、日程計画問題の作業時間が曖昧である前提のもとで、ファジィ理論の満足度関数を用いて定式化を行い、作業時間を数量化する。

次に、従来のPERT (Project Evaluation & Review Technique) 技法を用い、制約条件に相当するCP (Critical Path) を見つける。

次に、制約条件の活用策として、CPを構成する作業を満足度に基づいて順位付けを行い、満足度の減少幅が少ない作業から順次作業時間を減らしていき、新しいCPが見つかるまで繰り返す。この段階においては、主に、最大流問題のMinimum Cut理論が活用される。

次に、新しいCP (Critical Path) が見つかりと古いCPは非制約条件に従属させる。

新しいCP (Critical Path) において上記の段階を繰り返す。

この初期日程から出発してプロジェクトを短縮していく手順は、次のようにまとめられる。

- (1) クリティカル・パスを見つめる。
- (2) クリティカル・パス上で単位時間当りの費用勾配が最小であるカット (単一の作業のことも、作業の組合せのこともある) を見つける。
- (3) (2) で見つけた最小カットの作業または作業の組の所要時間を、その費用勾配で縮められる限界まで縮めた日程を作る。
- (4) (3) の日程の短縮による費用の増加分を計算する。
- (5) (3) で新たに得られた日程をもとにして (1) に戻る。
- (6) (2) ですべてのカットの費用勾配が無限大となれば、これ以上の短縮はできない。

短縮は、すべての作業を特急所要時で行った場合のプロジェクト遂行時間に等しくなるまで行うことができる。

5. まとめ

本研究では、作業時間が曖昧な場合の日程計画問題を取り上げ、科学的に日程を短縮する手法「ファジィCPM」を提案し、その有効性を検討した。曖昧な作業時間はTOC理論でも取り上げられ、無駄な作業時間を一律、場合によっては50%も排除し、日程を調整していた。具体的には、すべての作業を短縮し、制約条件に相当するクリティカル・パスを構成する作業を保護するバッファ、プロジェクトを保護するバッファを設け、最短日程を求めている。

しかしながら、作業時間の一律的な短縮は現実性がなく、バッファの容量を加えると元のプロジェクト完了時間と変わらない。そこで、本研究では、曖昧な作業時間をファジィ理論の成果である満足度関数で表現し、作業毎満足度関数の傾き (単位満足度) の小さい順から作業時間を短縮していき、満足度の犠牲を最小限にしながらかプロジェクト完了時間を最小化する手法を提案した。Critical Path Method (CPM) の単位コスト (日程1単位を短縮するのにかかるコスト) の小さい順から作業を短縮していく点に着目したものである。

単一次元のコスト関数だけではなく、無駄な作業時間を発生させる複数要因を意思決定者の主観にもとづいた満足度関数で表現した点、日程短縮の科学的指標を与えた点を、数値例を用いて詳細に解説した。

今後の課題としては、満足度関数の同定問題、非線形満足度関数、複数プロジェクトの最適化問題、バッファの設定容量などが考えられる。

参考文献

- (1) The Goal「ザゴール」企業の究極とは何か エリア・ゴールドラット博士、三木本亮訳、稲垣公夫解説、ダイヤモンド社 (2001)
- (2) It's Not Luck「ザ・ゴール2」思考プロセス エリア・ゴールドラット博士、三木本亮訳、ダイヤモンド社 (2001)
- (3) 在庫が減る、利益が上がる、会社が変わる、村上悟／石田忠由共著、中経出版 (2002)
- (4) TOC革命、制約条件の理論 稲垣公夫著 日本能率協会マネジメントセンター (1997)
- (5) 制約理論 (TOC) のインプリメンテーション、マーク J.オッペル著、小林栄三翻訳 (2001)
- (6) 制約理論 (TOC) についてのノート 小林英三 ラッセル社 (2000)
- (7) 現代OR入門 西田俊夫／田畑吉雄編 現代数学社 (1995)
- (8) TOCハンドブック Robert E. Stein著 川辺 恭寛・椎名 茂・竹之内 隆・紅瀬 雄太監訳 TOC研究会訳
- (9) TOC戦略マネジメント 加藤治彦・竹之内隆・村上悟 日本能率協会マネジメントセンター (1999)
- (10) エリヤフ・ゴールドラット「制約理論」がわかる本 中野明著 秀和システム (2006)
- (11) おはなしファジィ 西田俊夫 編 日本規格協会 (1990)
- (12) 生産スケジューリング 黒田 充・村松 健児編 朝倉書店 (2002)