国際研究論叢　32（3）：1～23，2019

査読論文

特性関数を持つ協力ゲームの最適組み合わせ問題

安　達　康　生[*1]　　植　松　康　祐[*2]

Optimizing Groupings Using Cooperative Games with Characteristic Function

Yasuo Adachi[*1]　　Koyu Uematsu[*2]

Abstract

We are not sure if it is good for either a class or for society to group students by intelligence. The way to divide group properly is affected by what priorities are considered. If the purpose is to make the smartest student smarter, the current method in Japan of standard deviation value is obviously correct. However, to most benefit the entire classroom or entire society, we are not sure if this is the best way. Therefore, we are going to talk about methods which benefit the entire group the most.

In this paper, the classroom has three different kinds of students, which we divide into three-person groups. The benefit to each group is the sum of the three students' benefit in a cooperation game. The benefit to each person is given by the Shapley value from the characteristic function we defined. We investigate the properties of the characteristic function and some Lemmas by ranking groups. Finally, we can obtain a theorem to make the total benefit of the classroom maximal under the limited conditions.

We are sure that this research can be applied to group learning and education in the real world.

キーワード

ゲーム理論，協力ゲーム，Shapley値，特性関数，関数の凸性と凹性

＊1　あだち　やすお：大阪国際大学経営経済学部准教授〈2018.11.14受理〉
＊2　うえまつ　こうゆう：大阪国際大学グローバルビジネス学部教授

第１章　序論　ゲーム理論の歴史と提携形ゲーム

ゲーム理論は，コンピュータの生みの親であり，20世紀を代表する数学者John Von Neumannとオーストリア学派の経済学者Oskar Morgensternによる「ゲームの理論と経済行動」[10]の出版によって世に知られるようになった．この本の出版の意義は，厳密な経済行動の分析に数学理論の必要性を示しただけではなく，新しい数学分野である不動点定理や凸解析などの発展にも貢献した．

Neumannは，20世紀を代表する大天才の一人であることは，誰もが認めるところである．彼の業績は，ゲーム理論だけではなく，数学分野では集合論や関数解析，物理学分野では量子力学における新しい数学表現，複雑系分野でのセルオートマトンなどの現在の基礎科学となっている新しい領域を作り出した．彼の出身国はハンガリーで，第二次世界大戦時にアメリカに亡命し，プリンストン高等研究所で研究を始めた．Neumannに加えて，同時期にハンガリーから亡命してきたLeo Szilard，Eugene Wigner，Edward Tellerは，米国の原子爆弾・水素爆弾の開発で中心的な役割を果たしたことで知られている．特に，Leo Szilard は，アインシュタインを通じてルーズベルト大統領に原子爆弾の開発を進言したことで有名である．また，Eugene Wignerは，1963年にノーベル物理学賞を受賞している．特に，彼らが同世代で，ハンガリーのブタペスト出身であることに驚かされる．この時期に，ブタペストからは，ノーベル化学賞・ノーベル医学生理学賞などを受賞した優れた科学者を多く輩出している．この現象に着目したハンガリー人の物理学者Gyorgy Marxは，1990年代に『異星人伝説』[5]などの著書を出版したことにより，Neumannは火星人であったという噂が，現在のネット上にも流布している．Gyorgy Marxは，このような優秀な科学者を輩出した要因の一つは，ブタペストのギムナジウム（中等学校）に，数学・科学関係の優れた教師が多くいたことであると指摘している．もう一つの要因は，長い歴史を持つ数学・物理関係のコンテストにあると言われている[6]．

ハンガリーでは，数学オリンピックの起源となる数学・物理関係のオトボス・コンテストが1894年から行われており，1947年からはクルシャーク・コンテストと名称を変えて続けられていた．この流れを汲んだ国際数学オリンピックが，1959年にお隣の国であるルーマニアで開催される運びとなった．最近こそ，日本が国際数学オリンピックで優秀な成績を挙げていることが報道されているが，日本がこれに参加したのは，1990年からである[3]．

日本の参加に大きく貢献したのが，日本でも良く知られている大道芸人であり数学者でもあるPeter Frankl（日本名：富蘭平太）である．彼は，TBSテレビ「世界ふしぎ発見！」，「サンデーモーニング」，日本テレビ「世界一受けたい授業」などの多くのテレビ番組に出演して，日本では数十か国語を話すことができる大道芸人として人気を博しているが，ハンガリー出身の天才数学者でもある．彼自身も，1971年国際数学オリンピックで金メダルを取得し，1998年には権威あるハンガリー学士院メンバーにもなっている[4]．

Neumannは，1928年に「社会的ゲームの理論について」[8]の論文を発表しており，ゲーム理論の基礎となる枠組みは準備されていたものと思われる．その後，数学では集合

論と代数学，物理学では量子力学の分野で多くの業績を発表していった．その中でも1932年に発表された「量子力学の数学的基礎」[9]では，従来の古典力学を記述する数学を超えた新しい数学の導入を提案したものであった．1944年の「ゲームの理論と経済行動」[10]を世に送り出す原動力となったのが，ウィーン・サークルの人々であった．その中心的なメンバーは，経済学者Oskar Morgenstern，哲学者Karl Raimund Poper，当時幾何学者Abraham Wald，幾何学者Karl Mengerであり，ともに1902年生まれの同じ歳であった．彼らは，偉大な数学者David Hilbertの公理主義的幾何学の体系構造の方法にならって，社会科学の公理的体系化を提案している．ウィーン・サークルの中でも特筆すべきことは，数理経済学の確立に大きく寄与したAbraham WaldとKarl Schlesingerによる経済の一般均衡理論に関する業績である．驚くべきことに，この二人もハンガリー出身で，後にアメリカへの亡命を果たしている[15]．

アメリカ亡命後のAbraham Waldは，人間と自然とのゲームという考え方で，統計的決定関数の理論を創設し，統計的推論の考え方を飛躍的に発展させた．彼の業績は極めて高く評価され，理論経済学の大家Paul Anthony Samuelsonは「統計学にもしノーベル賞があれば，まずAbraham Waldに与えるべきであろう」と言ったといわれている．1950年，残念なことにインドへの講演途中に飛行機事故で亡くなった[11]．

これまでの正統派経済学の思想とは「神の見えざる手に導かれて予定の調和に達する」というものであったが，それに反してゲーム理論は，一つの異端の思想であった．しかし，この理論は特殊なものではなく，普遍性をもったものでもあった[15]．

John Von Neumannは，1944年の「ゲームの理論と経済行動」[10]の発刊直前に，原子爆弾の開発計画，いわゆるマンハッタン計画に参加し，世間からは姿を消したと言われた．その後，主に計算理論・計算機の研究に取り組み，世界最初のプログラム内蔵方式のコンピュータEDVAC（Electronic Discrete Variable Automatic Computer）の開発に関わった．その功績から，現在使われているコンピュータはノイマン型と呼ばれている．

第二次世界大戦の終了後，彼は再びプリンストン大学に戻り，ゲーム理論などの講義を行っていたが，その中に，ゲーム理論を大きく発展させたJohn Forbs Nashが大学院学生をしていた．John Forbs Nashは，カーネギー工科大学（現在のカーネギーメロン大学）の学部生時代にナッシュ交渉解に関する論文を発表し，プリンストン大学では２年で博士論文「非協力ゲーム」[7]を書き終えた．この論文の中に，ナッシュ均衡という新しい均衡概念を提示し，さまざまな経済行動が適切に理解できる理論を作り出した．このようなNashの研究手法は，ナッシュ・プログラムと呼ばれ，ゲーム理論や経済学理論に大きな影響を与えた．このことが認められ，1994年にノーベル経済学賞を受賞し，その後に，彼の人生を映画化した「ビューティフル・マインド」（A beautiful mind, 2001）で全世界に知られるようになった．しかし，残念なことに，2015年５月25日の交通事故で夫妻共に亡くなった．

Nashが大学院を卒業した後，サンタモニカにある米空軍の援助によって作られたRAND（Research and Development）研究所で研究していた時期に，ハーバード大学を卒業したLloyd S. Shapleyも同じ研究所に席を置いていた．その後，Shapleyは，Nashと

同じプリンストン大学の大学院に進学した．そのShapleyもまた，2012年Alvin E. Rothと共にノーベル経済学賞を受賞した．

Nashがナッシュ均衡の概念を与えたのち，ゲーム理論は，非協力ゲーム理論と協力ゲーム理論の２つの流れに分かれて発展してきた．我々が，本論文で扱うのは，協力ゲームである．人々は，様々な組織の中で経済活動を営んでおり，そのメンバー協力によって利益を得ている．たとえば，利潤を追求する企業や労働者たちが組織する組合などにおいて，利益配分方法の妥当性が問題となる協力ゲームの配分方法としては，コア（Core）と呼ばれる概念がある．このコアの集合に含まれる配分方法は，提携合理性と呼ばれ，協力して獲得した利得より自分たちで配分した方が得にならないことを意味している．コアに含まれる配分方法は，自分たちにとってより望ましい配分が存在しないため，安定的であると呼ばれる．コアの定義は集合であるために，空集合となることもあれば，広い領域となる場合も存在する．配分方法がユニークに存在し，かつ，このコアの考えた方を受け継いだ仁（Nucleolus）と呼ばれる配分方法がある．仁は，D. Schmeidlerによって提案された解であり，配分の中での最大の不満が最小となる配分方法を導くものである．配分に不満が生まれる協力ゲームには有効と思われるが，今回我々が提案する協力ゲームは，協力によって必ず利益が生まれる場合を想定しているために適さないと判断した．そこで，配分方法がユニークに存在するものとして，各メンバーの貢献度に応じた利得配分を提案するShapley値に注目した．2012年にノーベル賞受賞の業績の一つとなったShapley値は，次の４つの公理を満たす唯一の配分であることが証明されている．公理１は，与えられた配分より利得を大きくする配分は存在しないというパレート最適性を持つ．公理２は，どのような提携に対しても貢献度が０であるメンバーのShapley値は０である．公理３は，すべての提携に対する貢献度が等しい２人のメンバーのShapley値は同じである．公理４は，２つのゲームの和として定式化されるゲームのShapley値は，それぞれのゲームのShapley値の和に等しい．Shapley値の意味するものは，自分自身が他の人々との協力に関する限界貢献度の期待値となっている[12]．

我々は，協力ゲームにおけるShapley値に注目し，配分を決定する特性関数に関して新しい提案を行う．先行研究「Some Coalitional Games with the Shapley Value」[1]では，協力ゲームにおいて，２人の関係が利得に影響する特性関数を定義した．たとえば，潜在能力が異なる３人での協力ゲームを考えるときに，その中のある個人が自分の利得を最大にするためには，それぞれの関係がどのようなときに最大となるのかを議論した．２人の関係を表す状態が３種類として，３人による協力ゲームでは，$3^3=27$通りのゲーム値が存在する．２人の関係の状態を選択することを戦略とすれば，３人の中で潜在能力の低いメンバーがより高い利得を得るための戦略について，特性関数を変えて数値計算を行った．更に，４人の協力ゲームへの拡張した論文が，「特性関数を考慮した４人協力ゲーム」[3]であり，$3^6=729$通りのゲーム値に関して，戦略を議論した．これらの研究を背景にして，ある集団を３人ずつのグループに分けて，そのグループ内での協力ゲームにおけるShapley値の合計を最大にする組み合わせに関する議論を行う．また，これらの特性関数に関する性質を調べ，集団でのShapley値の合計を最大にする最適な組み合わせに関す

る定理を導出する.

第２章　提携形ゲームを伴う組み合わせ問題

我々の問題起原は，日本の高校以上の教育のように優秀な学生だけを集めて教育を行うことが，日本全体として学力向上につながっているのであろうかということにあった．オリンピックやサッカーのワールドカップを目指す優れた選手を育てるならば，効率の高い手法であることは明らかである．あるスポーツ種目を考えてみても，同世代の子供たち全員が同じ技能や能力を保持しているとは思えない．同じ練習量を課しても，その成長には個人差があるのは当然である．当然，学力においても個人差があることは否定できない．非常に能力の高い生徒もいれば，時間を掛けて練習を重ねることによって理解できる生徒もいる．しかし，国や地域単位での総合的な学力を押し上げる方法としては，優秀な生徒と能力的に低い生徒を分離することが最善の策であることに疑問を抱いている．日本では，高校進学率がほぼ100%に近く，高学歴化が進んでいる状況において，国民全体としての総合能力の向上を目指す必要がある．本研究では，学校でのクラスを想定して，生徒のタイプは３つ，その生徒３人を１つの組としてグループ学習をさせる．本来，生徒のタイプを３つに集約することは困難であるが，４つ以上となると組み合わせ数が急激に増加するために，３つとした．そして，３人を１つのグループとした理由は，３つのタイプの生徒を集めることができるためである．３人のグループは，国や地域の単位から見れば，ひとつの学校単位と見なすこともできる．３人のグループでの利得には，Shapleyによって導出されたタイプの提携形ゲームを考える．ただし，２人の協力による利得には，２人の関係に依存する特性関数を導入する．ここで考えている状況は，各プレイヤーは３つのタイプに分類され，３人が１チームとなって提携形ゲームを行うものとする．たとえば，学校におけるクラス内でのグループ分けを想定したとき，このクラスの生徒をテスト等の評価点を用いて「優秀なタイプ」,「普通なタイプ」,「落ちこぼれタイプ」に分類して，どの様な組み合わせがそのクラス全体の利得を最大にするかを議論する．クラスによっては，優秀なタイプの生徒が多い場合や，普通なタイプの生徒が多い場合など片寄りが考えられるが，本研究で提案するモデルでは３つのタイプの生徒数は同じとする．また，３人を１チームとするため，各タイプの生徒数は３の倍数とする．この提案モデルは，学校だけでなく，企業内での人員配置などにも応用できるものと考える.

２．１　基本モデルの定義

ここでは分かり易くするために，学校のクラスを想定して定義を行う.

優秀なタイプの生徒：　$X_1, X_2, \cdots, X_{3n}$

普通なタイプの生徒：　$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{3n}$

落ちこぼれタイプの生徒：　$Z_1, Z_2, \cdots, Z_{3n}$

生徒全体を順列した集合をTとし，集合Tから順に３人$W_{3i-2}, W_{3i-1}, W_{3i}$ $(i = 1,2, \cdots 3n)$を選んで作られたグループをG_i $(i = 1,2, \cdots 3n)$とする．すなわち，９n人を３nグループに分

けたことになる．

$$G_i=\{W_{3i-2}\cup W_{3i-1}\cup W_{3i}|W_{3i-2},W_{3i-1},W_{3i}\in T\}\ (i=1,2,\cdots 3n)$$

$$T=\bigcup_{i=1}^{3n}G_i$$

各生徒W_iとW_jの単独でゲームを行ったときの利得を，$v(W_i)=w_i$，$v(W_j)=w_j$（正の実数）と定義する．すなわち，生徒W_iは，３つタイプの中の１人を選択したことになり，その生徒の個人能力がw_iである．集合T全員の個人能力は，

$$v(X_1)=x_1,v(X_2)=x_2,\cdots v(X_{3n})=x_{3n},\cdots,v(Y_{3n})=y_{3n},\cdots,v(Z_{3n})=z_{3n}$$

が与えられていると仮定して，すべての値は正の値とする．すなわち，w_iとw_jは，９n個の中のどれかの値をとることになる．また，生徒W_iとW_jの関係を表す関数を，$r(W_i\cup W_j)$とし，$r(W_i\cup W_j)$は，２人の生徒のタイプに依存した値を与えるものとする．優秀な生徒同士が協力した場合は，他のタイプの生徒同士の場合よりその値は高くなることを想定している．

Shapley値を与える２人が協力したときに得られる利得を表す特性関数を，$v\left(W_i\cup W_j,r(W_i\cup W_j)\right)$とする．

次に，３人が協力したときに得られる利得を表す特性関数は，次の様に定義する．

$$v\left(W_i\cup W_j\cup W_k,r(W_i\cup W_j\cup W_k)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{v\left(W_i\cup W_j,r(W_i\cup W_j)\right)+v\left(W_j\cup W_k,r(W_j\cup W_k)\right)+v(W_i\cup W_k,r(W_i\cup W_k))\right\}\cdots\cdots(1)$$

グループ$G_i=\{W_{3i-2}\cup W_{3i-1}\cup W_{3i},|W_{3i-2},W_{3i-1},W_{3i}\in T\}$の中での協力ゲームにおける各個人のShapley値$f(W_{3i-2})$は次の様に定義される．

$$f(W_{3i-2})$$

$$=\frac{2!}{3!}\{v(W_{3i-2})-v(\emptyset)\}+\frac{1}{3!}\left\{v\left(W_{3i-2}\cup W_{3i-1},r(W_{3i-2}\cup W_{3i-1})\right)-v(W_{3i-1})\right\}$$

$$+\frac{1}{3!}\left\{v\left(W_{3i-2}\cup W_{3i},r(W_{3i-2}\cup W_{3i})\right)-v(W_{3i})\right\}$$

$$+\frac{2!}{3!}\left\{v\left(W_{3i-2}\cup W_{3i-1}\cup W_{3i},r(W_{3i-2}\cup W_{3i-1}\cup W_{3i})\right)\right.$$

$$\left.-v\left(W_{3i-1}\cup W_{3i},r(W_{3i-1}\cup W_{3i})\right)\right\}\cdots\cdots(2)$$

$f(W_{3i-1})$と$f(W_{3i})$も同様に定義される．従って，グループG_iの利得を$F(G_i)$と表せば，$F(G_i)=f(W_{3i-2})+f(W_{3i-1})+f(W_{3i})$となる．

よって，クラス全体の利得をSGV（Sum of Group Values）とすれば，

$SGV=\sum_{i=1}^{3n}F(G_i)$となる．

我々の目的は，特性関数$v\left(W_i \cup W_j, r(W_i \cup W_j)\right)$がどの様な性質を持っているときに，SGVを最大とするグループG_lの組み合わせが存在するかを調べることにある．同じ構成メンバーにも関わらず，グループの組み合わせによってSGVが変化し，その中でSGVを最大化する組み合わせがどの様なものであるかに対しては非常に興味深い．

２．２　凸性を持った特性関数の定義

特性関数の状態を表す関数が離散的な場合の数値計算において，いくつかのパターンが生じることを確認している．潜在的な利得が高い組み合わせが有利となる前提は保持する中で，その増加程度が凸と凹によって性質が異なることを予想した．

そこで，特性関数$v\left(W_i \cup W_j, r(W_i \cup W_j)\right)$に具体的な性質を与えないと分析が進めることができないことより，一般性は失われるが個人の利得が反映される関数とその２人の状態が反映できる関数との積とした．２人が単独ゲームを行ったときの利得$v(W_i) = w_i$と$v(W_j) = w_j$に依存した関数$g(w_i, w_j)$と，w_iとw_jの関係によって与えられる関数は，２人の利得の和に依存する$h(w_i + w_j)$の積によって定義する．

$$v\left(W_i \cup W_j, r(W_i \cup W_j)\right) = g(w_i, w_j) \cdot h(w_i + w_j)$$

（i）$g(x, y) = g(y, x)$，（ii）$\frac{\partial}{\partial x} g(x, y) > 0, \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) > 0$，

（iii）$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, y) > 0, \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x, y) > 0$，

（iv）$\frac{d}{dz} h(z) > 0$，（v）$\frac{d^2}{dz^2} h(z) > 0$を満たすものとする．

（vi）$v(X_1) = x_1 \geqq v(X_2) = x_2 \geqq \cdots \geqq v(X_{3n}) = x_{3n}$
$\geqq v(Y_1) = y_1 \geqq v(Y_2) = y_2 \geqq \cdots \geqq v(Y_{3n}) = y_{3n}$
$\geqq v(Z_1) = z_1 \geqq v(Z_2) = z_2 \geqq \cdots \geqq v(Z_{3n}) = z_{3n}$

と仮定すると，次の様な性質が確認できる．

［Property I］

$$\left\{W_{3i-2}, W_{3i-1}, W_{3i}, \in T \,\middle|\, \max_{1 \le i \le 3n} F(G_i)\right\} = \{X_1, X_2, X_3\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\left\{W_{3i-2}, W_{3i-1}, W_{3i}, \in T \,\middle|\, \min_{1 \le i \le 3n} F(G_i)\right\} = \{Z_{3n-2}, Z_{3n-1}, Z_{3n}\} \cdots\cdots (4)$$

［Proof］

（２）に（１）を適用すると，

$$
\begin{aligned}
F(G_i) &= f(W_{3i-2}) + f(W_{3i-1}) + f(W_{3i}) \\
&= \frac{1}{2}\{v(W_{3i-2} \cup W_{3i-1}, r(W_{3i-2} \cup W_{3i-1})) + v(W_{3i-2} \cup W_{3i}, r(W_{3i-2} \cup W_{3i})) \\
&\quad + v(W_{3i-1} \cup W_{3i}, r(W_{3i-1} \cup W_{3i}))\}
\end{aligned}
$$

となる．$F(G_i)$は，（i），（ii），（iv）より，W_{3i-2}，W_{3i-1}，W_{3i}に関して単調増加となり，最大となるのは，(x_1, x_2, x_3)の値をとるときであり，最少となるのは，$(z_{3n-2}, z_{3n-1}, z_{3n})$のときである．■

［Property II］

$0 < z < y < x$,　$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$,　$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$に対して，

$$g(y,w) < \lambda_1 g(x,w) + \lambda_2 g(z,w)$$

が成り立つ．

［Proof］

$y = \lambda_1 x + \lambda_2 z$とすると，

$$
\begin{aligned}
y - z &= \lambda_1 x - (1 - \lambda_2) z = \lambda_1 (x - z) \\
x - y &= (1 - \lambda_1) x - \lambda_2 z = \lambda_2 (x - z)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$g_x(c,w) = \frac{\partial}{\partial x} g(x,w)\Big|_{x=c}$と定義すると，平均値の定理より，

$$\frac{g(y,w) - g(z,w)}{y - z} = g_x(c_1, w), \quad z < c_1 < y$$

$$\frac{g(x,w) - g(y,w)}{x - y} = g_x(c_2, w), \quad y < c_2 < x$$

となるc_1とc_2が存在する．

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,w) > 0$より，$\frac{\partial}{\partial x} g(x,w)$は$x$に関して単調増加であるので，$c_1 < c_2$より，

$g_x(c_1, w) < g_x(c_2, w)$となる．従って，

$$\frac{g(y,w) - g(z,w)}{\lambda_1} < \frac{g(x,w) - g(y,w)}{\lambda_2}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) g(y,w) < \lambda_1 g(x,w) + \lambda_2 g(z,w)$$

となる．■

［Property III］

ここで，$g_x(x + \theta h, w) = \frac{\partial}{\partial x} g(x,w)\Big|_{x=x+\theta h}$と定義する．

$g(x+h,w)=g(x,w)+hg_x(x+\theta h,w)$とするとき，$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$となる．

［Proof］

$$g(x+h,w)=g(x,w)+hg_x(x+\theta h,w)\quad (0<\theta<1)\ \cdots\cdots(5)$$

$g_x(x,w)$に対する平均値の定理より，

$$g_x(x+\theta h,w)=g_x(x,w)+\theta h g_{xx}(x+\theta'\theta h,w)\quad (0<\theta'<1)\ \cdots\cdots(6)$$

（６）×hを（５）に代入すると，

$$g(x+h,w)=g(x,w)+hg_x(x,w)+\theta h^2 g_{xx}(x+\theta'\theta h,w)\ \cdots\cdots(7)$$

Taylorの定理より，

$$g(x+h,w)=g(x,w)+hg_x(x,w)+\frac{h^2}{2}g_{xx}(x+\theta'' h,w)\quad (0<\theta''<1)\ \cdots\cdots(8)$$

（７）と（８）を比較すると，

$$\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{g_{xx}(x+\theta'' h,w)}{g_{xx}(x+\theta'\theta h,w)}$$

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}\quad (\because g_{xx}(x+\theta'' h,w)>0)$$

となる．■

上記の性質は，次の組み合わせモデルにおいて最大となる組み合わせを求める際に必要となる．［Property I］は，１グループ内のShapley値の合計を最大化するのは，優秀な生徒を集めたグループという明白なものであるが，クラス全体となると明らかではない．

［Property II］は，２変数関数$g(x,y)$と１変数関数$h(z)$の凸性を示している．［Property III］だけは異質なもので，微小区間での傾きは，その区間の真中での微係数と一致することを意味している．

２．３　組み合わせモデルの最適化

基本モデルでは，３つのタイプの生徒を各３n人とし，各個人がすべて異なるとした．我々の目的は，２．２で示した凸性を持った特性関数に対して，集団全体のShapley値の合計を最大にする組み合わせを求めることにある．各個人がすべて異なるときの３人ずつの組み合わせは，膨大な数となることは容易に想像ができる．そこで，基本モデルにおいて，$n=1$の場合を考えることとする．また，各タイプの個人で単独に得られる利得を同じとする．すなわち，

$$v(X_1)=v(X_2)=v(X_3)=x,$$

$$v(Y_1)=v(Y_2)=v(Y_3)=y,$$

$$v(Z_1)=v(Z_2)=v(Z_3)=z,$$

とする．

全体集合は，$T=\{X,X,X,Y,Y,Y,Z,Z,Z\}$と表すことができ，３つのグループに分ける方法は次の10通りとなり，各グループのShapley値の合計を計算する．

$$\mathrm{G}-1\text{:}\begin{cases}(X,X,X)\\(Y,Y,Y)\\(Z,Z,Z)\end{cases}, \quad \mathrm{G}-2\text{:}\begin{cases}(X,X,X)\\(Y,Y,Z)\\(Y,Z,Z)\end{cases}, \quad \mathrm{G}-3\text{:}\begin{cases}(X,X,Y)\\(X,Y,Y)\\(Z,Z,Z)\end{cases}, \quad \mathrm{G}-4\text{:}\begin{cases}(X,X,Y)\\(X,Y,Z)\\(Y,Z,Z)\end{cases}$$

$$\mathrm{G}-5\text{:}\begin{cases}(X,X,Y)\\(Z,Y,Y)\\(X,Z,Z)\end{cases}, \quad \mathrm{G}-6\text{:}\begin{cases}(X,X,Z)\\(Y,Y,Y)\\(X,Z,Z)\end{cases}, \quad \mathrm{G}-7\text{:}\begin{cases}(X,X,Z)\\(X,Y,Y)\\(Y,Z,Z)\end{cases}, \quad \mathrm{G}-8\text{:}\begin{cases}(X,X,Z)\\(X,Y,Z)\\(Y,Y,Z)\end{cases}$$

$$\mathrm{G}-9\text{:}\begin{cases}(X,Y,Z)\\(X,Z,Z)\\(X,Y,Y)\end{cases}, \quad \mathrm{G}-10\text{:}\begin{cases}(X,Y,Z)\\(X,Y,Z)\\(X,Y,Z)\end{cases}$$

グループG－1のSGVをSGV(G − 1)と表すと，

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-1)=\frac{3}{2}\{g(x,x)h(2x)+g(y,y)h(2y)+g(z,z)h(2z)\}$$

となる．以下同様に，

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-2)=\frac{1}{2}\{3g(x,x)h(2x)+g(y,y)h(2y)+g(z,z)h(2z)+4g(y,z)h(y+z)\}$$

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-3)=\frac{1}{2}\{g(x,x)h(2x)+g(y,y)h(2y)+3g(z,z)h(2z)+4g(x,y)h(x+y)\}$$

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-4)$$
$$=\frac{1}{2}\{g(x,x)h(2x)+g(z,z)h(2z)+3g(x,y)h(x+y)+3g(y,z)h(y+z)+g(x,z)h(x+z)\}$$

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-5)$$
$$=\frac{1}{2}\{g(x,x)h(2x)+g(y,y)h(2y)+g(z,z)h(2z)+2g(x,y)h(x+y)+2g(y,z)h(y+z)$$
$$+2g(x,z)h(x+z)\}$$

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-6)=\frac{1}{2}\{g(x,x)h(2x)+3g(y,y)h(2y)+g(z,z)h(2z)+4g(x,z)h(x+z)\}$$

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-7)$$
$$=\frac{1}{2}\{g(x,x)h(2x)+g(y,y)h(2y)+g(z,z)h(2z)+2g(x,y)h(x+y)+2g(y,z)h(y+z)$$
$$+2g(x,z)h(x+z)\}$$

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-8)$$
$$=\frac{1}{2}\{g(x,x)h(2x)+g(y,y)h(2y)+g(x,y)h(x+y)+3g(y,z)h(y+z)+3g(x,z)h(x+z)\}$$

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-9)$$
$$=\frac{1}{2}\{g(y,y)h(2y)+g(z,z)h(2z)+3g(x,y)h(x+y)+g(y,z)h(y+z)+3g(x,z)h(x+z)\}$$

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-10)=\frac{3}{2}\{g(x,y)h(x+y)+g(y,z)h(y+z)+g(x,z)h(x+z)\}$$

となる.

［Lemma I］

$a \geqq b \geqq 1$に対して,

$$g(a,a)h(2a)+g(b,b)h(2b) \geqq 2g(a,b)h(a+b)$$

が成り立つ.

［Proof］

$a=b+\Delta$とおく，ただし，$\Delta \geqq 0$とする．不等式の左辺－右辺より,

$$\begin{aligned}&\{g(a,b+\Delta)h(a+b+\Delta)-g(a,b)h(a+b)\}-\{g(b+\Delta,b)h(2b+\Delta)-g(b,b)h(2b)\}\\&\quad=\left[\{g(a,b)+\Delta g_y(a,b+\Delta\theta)\}\{h(a+b)+\Delta h'(a+b+\Delta\theta')\}-g(a,b)h(a+b)\right]\\&\quad-[\{g(b,b)+\Delta g_x(b+\Delta\theta'',b)\}\{h(2b)+\Delta h'(2b+\Delta\theta''')\}-g(b,b)h(2b)]\end{aligned}$$

（∵平均値の定理より，$0<\theta,\theta',\theta'',\theta'''<1$が存在する.）

$$\begin{aligned}&=g(a,b)\Delta h'(a+b+\Delta\theta')-g(b,b)\Delta h'(2b+\Delta\theta''')+h(a+b)\Delta g_y(a,b+\Delta\theta)\\&\quad-h(2b)\Delta g_x(b+\Delta\theta'',b)+\Delta^2 g_y(a,b+\Delta\theta)h'(a+b+\Delta\theta')-\Delta^2 g_x(b+\Delta\theta'',b)h'(2b+\Delta\theta''')\end{aligned}$$

ここで，$a \geqq b \geqq 1$および関数gの性質（i)～(iii）より，$g(a,b) \geqq g(b,b)$，$h(a+b) \geqq h(2b)$, $h'(a+b+\Delta\theta') \geqq h'(2b+\Delta\theta''')$となる.

また，関数gの性質（i）$g(x,y)=g(y,x)$から，$g(x,y)=x^2+y^2$のようなxとyを入れ替えても同じになる関数であると考えると，$g_y(a,b+\Delta\theta)=g_x(b+\Delta\theta,a) \geqq g_x(b+\Delta\theta'',b)$となる．よって,

$$g(a,b)\Delta h'(a+b+\Delta\theta')-g(b,b)\Delta h'(2b+\Delta\theta''') \geqq 0,$$

$$h(a+b)\Delta g_y(a,b+\Delta\theta)-h(2b)\Delta g_x(b+\Delta\theta'',b) \geqq 0,$$

$$\Delta^2 g_y(a,b+\Delta\theta)h'(a+b+\Delta\theta')-\Delta^2 g_x(b+\Delta\theta'',b)h'(2b+\Delta\theta''') \geqq 0,$$

となる．したがって,

$$g(a,a)h(2a)+g(b,b)h(2b)-2g(a,b)h(a+b) \geqq 0$$

となる．■

［Lemma II］

$a \geqq b > c \geqq 1$に対して,

$$g(a,a)h(2a)+g(b,b)h(2b)+g(c,c)h(2c) \geqq \frac{3}{2}\{g(a,c)h(a+c)+g(b,c)h(b+c)\}$$

が成り立つ.

［Proof］

Lemma Iより,

$$\frac{1}{2}\{g(a,a)h(2a)+g(c,c)h(2c)\} \geqq g(a,c)h(a+c) \cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}\{g(b,b)h(2b)+g(c,c)h(2c)\} \geqq g(b,c)h(b+c) \cdots\cdots\cdots \quad (10)$$

$$\frac{1}{4}\{g(a,a)h(2a)+g(b,b)h(2b)\} \geqq \frac{1}{2}g(a,c)h(a+c) \cdots\cdots \quad (11)$$

$$\frac{1}{4}\{g(a,a)h(2a)+g(b,b)h(2b)\} \geqq \frac{1}{2}g(b,c)h(b+c) \cdots\cdots \quad (12)$$

従って，（９）＋（10）＋（11）＋（12）より，題意は示される．■

［Lemma III］

$a \geqq b > c \geqq 1$に対して，

$$g(a,b)h(a+b)-g(a,c)h(a+c) \geqq g(b,b)h(2b)-g(b,c)h(b+c) \geqq g(b,c)h(b+c)-g(c,c)h(2c)$$

が成り立つ．

［Proof］

$b=c+\Delta$とおく，ただし，$\Delta>0$とする．

$$\begin{aligned}
&g(a,c+\Delta)h(a+c+\Delta)-g(a,c)h(a+c)\\
&\quad=\{g(a,b)+\Delta g_y(a,c+\Delta\theta)\}\{h(a+c)+\Delta h'(a+c+\Delta\theta')-g(a,c)h(a+c)\}\\
&\quad=\Delta h(a+c)g_y(a,c+\Delta\theta)+\Delta g(a,c)h'(a+c+\Delta\theta')\\
&\quad+\Delta^2 g_y(a,c+\Delta\theta)h'(a+c+\Delta\theta')\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (13)\\
&g(b,c+\Delta)h(b+c+\Delta)-g(b,c)h(b+c)\\
&\quad=\{g(b,b)+\Delta g_y(b,c+\Delta\theta'')\}\{h(b+c)+\Delta h'(b+c+\Delta\theta''')-g(b,c)h(b+c)\}\\
&\quad=\Delta h(b+c)g_y(b,c+\Delta\theta'')+\Delta g(b,c)h'(b+c+\Delta\theta''')\\
&\quad+\Delta^2 g_y(b,c+\Delta\theta'')h'(a+c+\Delta\theta''')\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \quad (14)\\
&g(c+\Delta,c)h(2c+\Delta)-g(c,c)h(2c)\\
&\quad=\{g(c,c)+\Delta g_x(c+\Delta\theta,c)\}\{h(2c)+\Delta h'(2c+\Delta\theta)-g(c,c)h(2c)\}\\
&\quad=\Delta h(2c)g_x(c+\Delta\theta,c)+\Delta g(c,c)h'(2c+\Delta\theta)\\
&\quad+\Delta^2 g_x(c+\Delta\theta,c)h'(2c+\Delta\theta)\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (15)
\end{aligned}$$

よって，（13），（14），（15）を比較すると，$g(a,b)$，$h(c)$，$g_x(a,b)$，$g_y(a,b)$，$h'(c)$の単調増加より，$(13) \geqq (14) \geqq (15)$となる．■

これらのLemmaを使って，10通りのSGVの大小関係を調べた．関数の凸性から，優秀な生徒を集めた方がSGVの値が大きくなることは予想できるが，すべての順序を予想することは困難である．また，理論的に大小関係を決定できないものも存在した．その結果を次のPropertyIVにまとめた．

［Property IV］

SGVを最大にする組み合わせは，G－1で，SGVを最少にする組み合わせは，G－10である．

また，次のような不等式が成立する．

$$\mathrm{GV}(\mathrm{G}-1) \geqq \begin{Bmatrix} \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-2) \\ \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-3) \\ \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-4) \end{Bmatrix} \geqq \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-5) = \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-7) \geqq \begin{Bmatrix} \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-6) \\ \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-8) \\ \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-9) \end{Bmatrix} \geqq \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-10)$$

［Proof］

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-1) - \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-2) = g(y,y)h(2y) + g(z,z)h(2z) - 2g(y,z)h(y+z) \geqq 0 \quad \cdots\cdots \text{(16)}$$

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-1) - \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-3) = g(x,x)h(2x) + g(y,y)h(2y) - 2g(x,y)h(x+y) \geqq 0 \quad \cdots\cdots \text{(17)}$$

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-1) - \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-4)$$

$$= g(x,x)h(2x) + \frac{3}{2}g(y,y)h(2y) + g(z,z)h(2z) - \frac{3}{2}g(x,y)h(x+y) - \frac{3}{2}g(y,z)h(y+z)$$

$$-\frac{1}{2}g(x,z)h(x+z)$$

$$= \frac{3}{4}\{g(x,x)h(2x) + g(y,y)h(2y) - 2g(x,y)h(x+y)\}$$

$$+\frac{3}{4}\{g(y,y)h(2y) + g(z,z)h(2z) - 2g(y,z)h(y+z)\}$$

$$+\frac{1}{4}\{g(x,x)h(2x) + g(z,z)h(2z) - 2g(x,z)h(x+z)\} \geqq 0 \quad \cdots\cdots \text{(18)}$$

Lemma Iより（16），（17），（18）が示される．

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-5) = \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-7)$$

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-1) - \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-5)$$

$$= g(x,x)h(2x) + g(y,y)h(2y) + g(z,z)h(2z) - \frac{3}{2}g(x,z)h(x+z) - \frac{3}{2}g(y,z)h(y+z)$$

$$\geqq 0 \quad \cdots\cdots \text{(19)}$$

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-2) - \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-5) = \{g(x,x)h(2x) - g(x,y)h(x+y)\} - \{g(x,z)h(x+z) - g(y,z)h(y+z)\}$$

$$\geqq 0 \quad \cdots\cdots \text{(20)}$$

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-3) - \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-5) = \{g(x,y)h(x+y) - g(x,z)h(x+z)\} - \{g(y,z)h(y+z) - g(z,z)h(2z)\}$$

$$\geqq 0 \quad \cdots\cdots \text{(21)}$$

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-4) - \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-5)$$

$$= \frac{1}{2}\{g(x,y)h(x+y) - g(x,z)h(x+z)\} - \frac{1}{2}\{g(y,y)h(2y) - g(y,z)h(y+z)\} \geqq 0 \quad \cdots\cdots \text{(22)}$$

$$\mathrm{SGV}(\mathrm{G}-5) - \mathrm{SGV}(\mathrm{G}-6) = \{g(x,y)h(x+y) - g(x,z)h(x+z)\} - \{g(y,y)h(2y) - g(y,z)h(y+z)\}$$

$$\geqq 0 \quad \cdots\cdots \text{(23)}$$

$\mathrm{SGV(G-5)-SGV(G-8)}$

$$=\frac{1}{2}\{g(x,y)h(x+y)-g(x,z)h(x+z)\}-\frac{1}{2}\{g(y,z)h(y+z)-g(z,z)h(2z)\}\geqq 0 \quad \cdots\cdots (24)$$

$\mathrm{SGV(G-5)-SGV(G-9)}$

$$=\frac{1}{2}\{g(x,x)h(2x)-g(x,y)h(x+y)\}-\frac{1}{2}\{g(x,z)h(x+z)-g(y,z)h(y+z)\}\geqq 0 \quad \cdots\cdots (25)$$

Lemma IIより（19）が示され，Lemma IIIより（20），（21），（22），（23），（24），（25）が示される．

$$\mathrm{SGV(G-8)-SGV(G-10)}=\frac{1}{2}\{g(x,x)h(2x)+g(y,y)h(2y)-2g(x,y)h(x+y)\}\geqq 0 \quad \cdots\cdots (26)$$

$$\mathrm{SGV(G-9)-SGV(G-10)}=\frac{1}{2}\{g(y,y)h(2y)+g(z,z)h(2z)-2g(y,z)h(y+z)\}\geqq 0 \quad \cdots\cdots (27)$$

Lemma Iより（26），（27）が示される．

以上より，次の様な関係がある．

$$\mathrm{SGV(G-1)}\geqq\begin{Bmatrix}\mathrm{SGV(G-2)}\\ \mathrm{SGV(G-3)}\\ \mathrm{SGV(G-4)}\end{Bmatrix}\geqq\mathrm{SGV(G-5)}=\mathrm{SGV(G-7)}\geqq\begin{Bmatrix}\mathrm{SGV(G-8)}\\ \mathrm{SGV(G-9)}\end{Bmatrix}\geqq\mathrm{SGV(G-10)}$$

が示された．■

$\mathrm{SGV(G-7)}\geqq\mathrm{SGV(G-6)}$ の関係があるが，$\mathrm{SGV(G-6)}$ と $\mathrm{SGV(G-8)}$，$\mathrm{SGV(G-9)}$，$\mathrm{SGV(G-10)}$の大小関係を示すことはできなかった．この段階では，$\mathrm{SGV(G-10)}$が最小となることは証明されていないが，次の数値計算から，$\mathrm{SGV(G-10)}$が最小であると推測できる．

２．４　凸性を持つ特性関数におけるグループ順序の数値計算

上記の定理においては，$\mathrm{SGV(G-1)}$が最大となることは証明されたが，順序が付かないグループが存在している．$\mathrm{SGV(G-2)}$，$\mathrm{SGV(G-3)}$，$\mathrm{SGV(G-4)}$の３つの大小を決めることができなかった．これらの順序に関しては，数値計算において見ることにする．

ここでは，凸性を持つ特性関数におけるグループ順序の特徴を見るための数値計算を行うために，$g(w_i,w_j)=w_i^2+w_j^2$，$h(w_i+w_j)=(w_i+w_j)^2$の様に定義する．無論，gとhの２つの関数は，２．２の（i）～（v）を満たしている．

（１）　yの変化による順位変動

図１は，優秀なタイプの生徒の利得xと落ちこぼれタイプの生徒の利得zをx=15，z=５に固定し，普通なタイプの生徒の利得yを５～15に増加させたときのクラス全体の総利得の変化による順位変動を示した図である．

２．３で示したように，すべての値yにおいて，G－1が最大（順位１位）となり，G－10が最少（順位10位）となっていることが確認できる．G－1は，優秀なタイプの生徒だけのグループ，普通なタイプの生徒だけのグループ，落ちこぼれタイプの生徒だけのグループ

でクラスを構成した場合であり，G－10は，すべてのタイプの生徒を均等に配置したクラスである．このことから，凸性を持つ特性関数で各グループの利得が定義される場合は，能力別のクラス編成が有効であるといえる．

また，yの値が増加するに伴い，G－2とG－3および，G－6，G－8，G－9の順位が入れ替わることが分かる．G－2とG－3を比較すると，優秀なタイプの生徒とそれ以外の生徒（普通なタイプの生徒，落ちこぼれタイプの生徒）の能力差がある場合は，優秀なタイプの生徒グループとそれ以外の生徒グループのクラス編成（G－2）が有効であり，逆に，落ちこぼれタイプの生徒とそれ以外の生徒（優秀なタイプの生徒，普通なタイプの生徒）の能力差がある場合は，落ちこぼれタイプの生徒グループとそれ以外の生徒グループのクラス編成（G－3）が有効であるといえる．同様に，G－9を見ると，各グループに優秀なタイプの生徒を配置することが有効であるといえる．このことから，チューター制度などが有効であると考えられる．

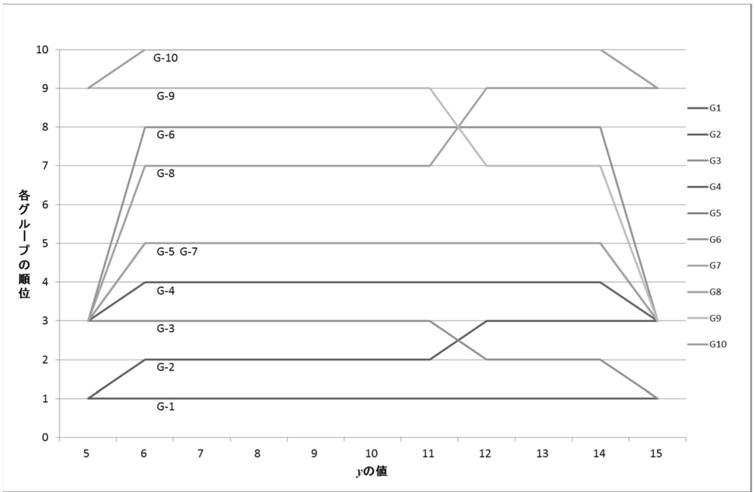

図１．x=15，z=５に固定，yの変化による順位変動

（２） xの変化による順位変動

図２は，普通なタイプの生徒の利得yと落ちこぼれタイプの生徒の利得zをy=10，z=５に固定し，優秀なタイプの生徒の利得xを10～20に増加させたときのクラス全体の総利得の変化による順位変動を示した図である．

前述と同様に，すべての値xにおいて，G－1が最大（順位１位）となり，G－10が最少（順位10位）となっていることが確認できる．G－1は，優秀なタイプの生徒だけのグループ，普通なタイプの生徒だけのグループ，落ちこぼれタイプの生徒だけのグループでクラスを構成した場合であり，G－10は，すべてのタイプの生徒を均等に配置したクラスである．このことから，凸性を持つ特性関数で各グループの利得が定義される場合，特に，優秀なタイプの生徒とそれ以外の生徒（普通なタイプの生徒，落ちこぼれタイプの生徒）の

能力差がある場合は，能力別のクラス編成が有効であるといえる．

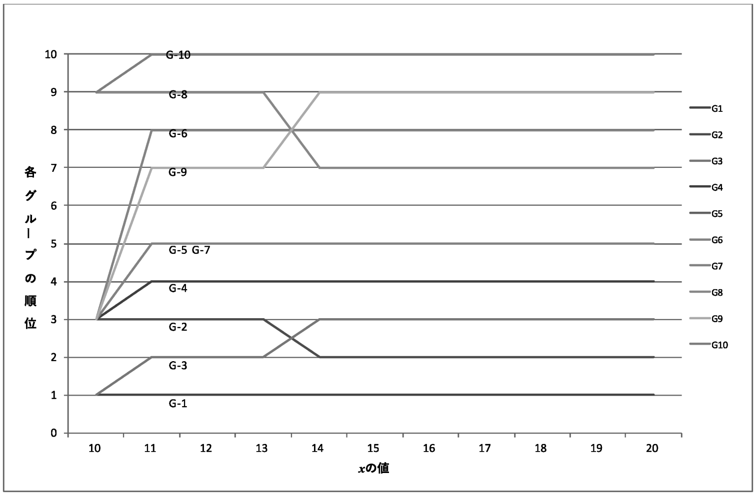

図２．y=10，z=５に固定，xの変化による順位変動

（３） zの変化による順位変動

図３は，優秀なタイプの生徒の利得xと普通なタイプの生徒の利得yをx=15，y=10に固定し，落ちこぼれタイプの生徒の利得zを１～10に増加させたときのクラス全体の総利得の変化による順位変動を示した図である．前述と同様に，すべての値zにおいて，G－１が最大（順位１位）となり，G－10が最少（順位10位）となっていることが確認できる．G－１は，優秀なタイプの生徒だけのグループ，普通なタイプの生徒だけのグループ，落ちこぼれタイプの生徒だけのグループでクラスを構成した場合であり，G－10は，すべてのタイプの生徒を均等に配置したクラスである．

このことから，凸性を持つ特性関数で各グループの利得が定義される場合，能力別のクラス編成が有効であるといえる．

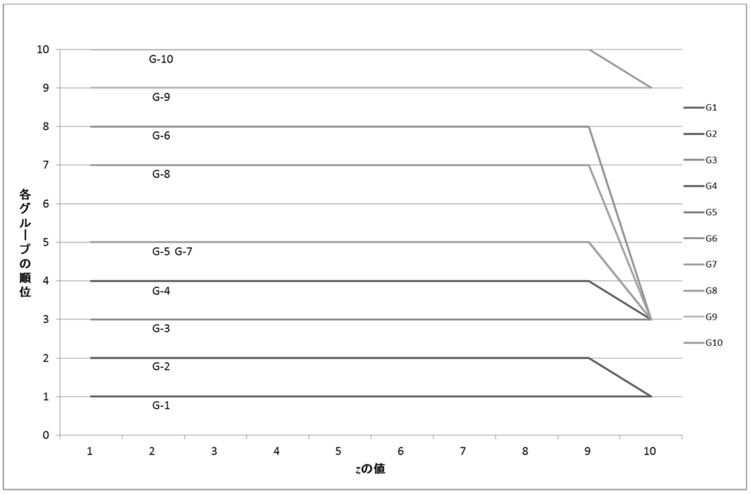

図３．x=15，y=10に固定，zの変化による順位変動

第３章　凹性を持つ特性関数

凸性を持つ特性関数の性質は，優秀な生徒グループの利得が大きくなるもので，クラスを能力別に分けることが，クラス全体の利得を最大にするという結果を導いた．しかし，２．２でも記述したようにその順序が逆転するような数値例があることを確認している．この章では，義務教育の様に，すべてのタイプの生徒を混在させた場合が最大となる条件について議論を行う．下位の生徒が優秀な生徒と一緒に学ぶことにより，その成長が増加する状況が望ましいような特性関数がどのようなものであるかを調べる．凸性を保持している関数でも，順序が確定できないグループが存在した．凹性を保持している場合には，その順序を確定することは，更に困難であった．ここでは，凹性を持つ具体的な関数に関しての解析のみとする．数値計算の結果からも確認できるが，10通りのグループにおいても，その順序は大きく変動していることが確認できた．

３．１　凹性を持つ特性関数に関する解析

ここでは，２．２で定義した一般形の関数ではなく，具体的な関数に関しての解析を行うこととする．ここで，

$$g\left(w_i, w_j\right) = \log\left(w_i^2 + w_j^2\right),\ \ h\left(w_i + w_j\right) = \log\left(w_i + w_j\right)$$

と定義する．

２．２において，(i)，(ii)，(iv) の性質は保持しているが，(iii)，(v) は逆となり，$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, y) < 0$，$\frac{d^2}{\partial z^2} h(z) < 0$となる．

［Property V］

$l(x)=\log(2x^2)\log(2x)$は，$x>\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}e$のとき，単調増加かつ凹関数である．

［Proof］

$2x=X$とおくと，

$$l(X)=\log\left(\frac{X^2}{2}\right)\log X=(2\log X-\log 2)\log X$$

$$l'(X)=\frac{2}{X}\log X+(2\log X-\log 2)\frac{1}{X}=\frac{1}{X}(4\log X-\log 2)=\frac{1}{X}\log\left(\frac{X^4}{2}\right)$$

となる．

よって，$x>\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}e$より，$X>\sqrt[4]{2}e$であり，$\frac{X^4}{2}>1$より，$l'(X)>0$となる．

$$l''(X)=-\frac{4}{X^2}\log X+\frac{4}{X}\frac{1}{X}+\frac{1}{X^2}\log 2=\frac{4}{X^2}\left(1-\log X+\frac{1}{4}\log 2\right)=\frac{4}{X^2}\log\left(\frac{\sqrt[4]{2}e}{X}\right)$$

よって，$x>\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}e$より，$X>\sqrt[4]{2}e$であり，$\frac{\sqrt[4]{2}e}{X}<1$より，$l''(X)<0$となる．■

［Property VI］

$$\log(x^2+y^2)\cdot\log(x+y)\geqq\frac{1}{2}\{\log(x^2+x^2)\cdot\log(x+x)+\log(y^2+y^2)\cdot\log(y+y)\}$$

ただし，$x\geqq y\geqq\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}e$とする．

［Proof］

［Property V］より，$l(X)$は単調増加かつ凹関数であるので，

$$l(x+y)\geqq\frac{l(2x)+l(2y)}{2}$$

が成り立つ．

$$l(x+y)=\log\left(\frac{(x+y)^2}{2}\right)\log(x+y)$$

$$x^2+y^2-\frac{(x+y)^2}{2}=\frac{(x-y)^2}{2}\geqq 0$$

$$\log(x^2+y^2)\log(x+y)\geqq l(x+y)\geqq\frac{l(2x)+l(2y)}{2}=\frac{1}{2}\{\log(2x^2)\log(2x)+\log(2y^2)\log(2y)\}$$ ■

$g(x,y)=\log(x^2+y^2)$，$h(x+y)=\log(x+y)^2$と定義するとき，次の様な定理が成り立つ．

［Property VII］

$$\mathrm{SGV(G-10)} \geqq \mathrm{SGV(G-1)}$$

［Proof］

$$\mathrm{SGV(G-1)} = \frac{3}{2}\{\log(2x^2)\log(2x)^2 + \log(2y^2)\log(2y)^2 + \log(2z^2)\log(2z)^2\}$$

$$\mathrm{SGV(G-10)} = \frac{3}{2}\{\log(x^2+y^2)\log(x+y)^2 + \log(y^2+z^2)\log(y+z)^2 + \log(x^2+z^2)\log(x+z)^2\}$$

［Property VI］より，

$$\log(x^2+y^2)\log(x+y) \geqq \frac{1}{2}\{\log(2x^2)\log(2x) + \log(2y^2)\log(2y)\} \quad \cdots\cdots \quad (28)$$

$$\log(x^2+z^2)\log(x+z) \geqq \frac{1}{2}\{\log(2x^2)\log(2x) + \log(2z^2)\log(2z)\} \quad \cdots\cdots \quad (29)$$

$$\log(y^2+z^2)\log(y+z) \geqq \frac{1}{2}\{\log(2y^2)\log(2y) + \log(2z^2)\log(2z)\} \quad \cdots\cdots \quad (30)$$

よって，(28) ＋ (29) ＋ (30) より，$\mathrm{SGV(G-10)} \geqq \mathrm{SGV(G-1)}$が示された．■

３．２　凹性を持つ特性関数における組み合わせモデルの数値計算

ここで，凹性を持つ特性関数におけるグループ化の特徴を見るために数値計算を行うために，$g(w_i, w_j) = \log(w_i^2 + w_j^2)$，$h(w_i + w_j) = \log(w_i + w_j)^2$の様に定義する．

（１） yの変化による順位変動

図４は，優秀なタイプの生徒の利得xと落ちこぼれタイプの生徒の利得zをx=15，z=５に固定し，普通なタイプの生徒の利得yを５～15に増加させたときのクラス全体の総利得の変化による順位変動を示した図である．３．１で示したように，すべての値yにおいて，G－10が最大（順位１位）となり，G－1が最少（順位10位）となっていることが確認できる．G－1は，優秀なタイプの生徒だけのグループ，普通なタイプの生徒だけのグループ，落ちこぼれタイプの生徒だけのグループでクラスを構成した場合であり，G－10は，すべてのタイプの生徒を均等に配置したクラスである．

このことから，凹性を持つ特性関数で各グループの利得が定義される場合は，能力別のクラス編成ではなく，各生徒を均等に配置するクラス編成が有効であるといえる．また，yの値が増加するに伴い，G－2とG－3および，G－6，G－8，G－9の順位が入れ替わることが分かる．G－2とG－3を比較すると，優秀なタイプの生徒とそれ以外の生徒（普通なタイプの生徒，落ちこぼれタイプの生徒）の能力差がある場合は，優秀なタイプの生徒グループとそれ以外の生徒グループのクラス編成（G－2）が有効であり，逆に，落ちこぼれタイプの生徒とそれ以外の生徒（優秀なタイプの生徒，普通なタイプの生徒）の能力差がある場合は，落ちこぼれタイプの生徒グループとそれ以外の生徒グループのクラス編成（G－3）が有効であるといえる．

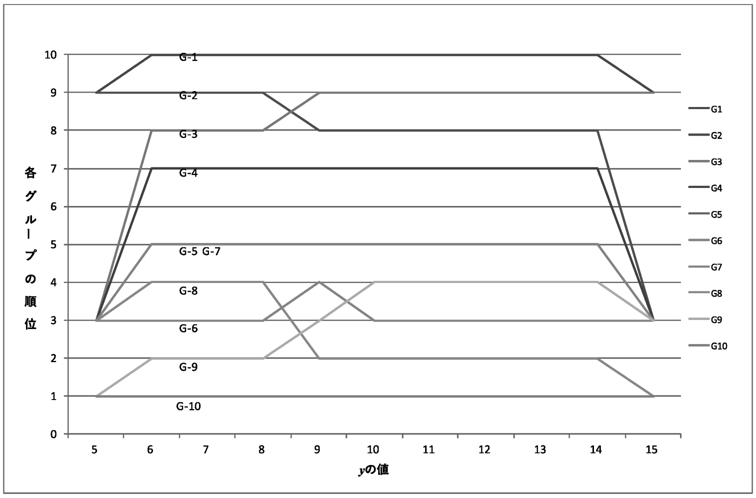

図４．x=15，z=５に固定，yの変化による順位変動

（２） xの変化による順位変動

図５は，普通なタイプの生徒の利得yと落ちこぼれタイプの生徒の利得zをy=10，z=５に固定し，優秀なタイプの生徒の利得xを10～20に増加させたときのクラス全体の総利得の変化による順位変動を示した図である．前述と同様に，すべての値xにおいて，G－10が最大（順位１位）となり，G－１が最少（順位10位）となっていることが確認できる．G－１は，優秀なタイプの生徒だけのグループ，普通なタイプの生徒だけのグループ，落ちこぼれタイプの生徒だけのグループでクラスを構成した場合であり，G－10は，すべてのタイプの生徒を均等に配置したクラスである．

このことから，凹性を持つ特性関数で各グループの利得が定義される場合，特に，落ちこぼれタイプの生徒とそれ以外の生徒（優秀なタイプの生徒，普通なタイプの生徒）の能力差がある場合は，能力別のクラス編成が有効であるといえる．

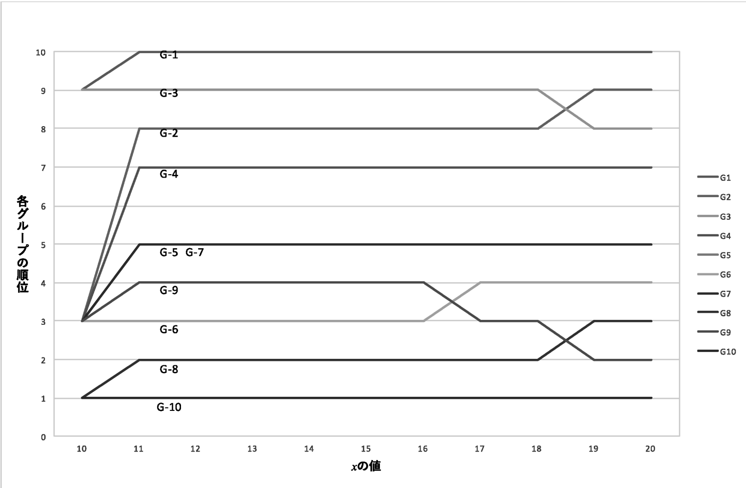

図５．y=10，z=５に固定，xの変化による順位変動

（３） zの変化による順位変動

図６は，優秀なタイプの生徒の利得xと普通なタイプの生徒の利得yをx=15，y=10に固定し，落ちこぼれタイプの生徒の利得zを１～10に増加させたときのクラス全体の総利得の変化による順位変動示した図である．前述と同様に，すべての値zにおいて，G－10が最大（順位１位）となり，G－1が最少（順位10位）となっていることが確認できる．G－1は，優秀なタイプの生徒だけのグループ，普通なタイプの生徒だけのグループ，落ちこぼれタイプの生徒だけのグループでクラスを構成した場合であり，G－10は，すべてのタイプの生徒を均等に配置したクラスである．

このことから，凹性を持つ特性関数で各グループの利得が定義される場合，特に，落ちこぼれタイプの生徒とそれ以外の生徒（優秀なタイプの生徒，普通なタイプの生徒）の能力差がある場合は能力別のクラス編成が有効であるといえる．

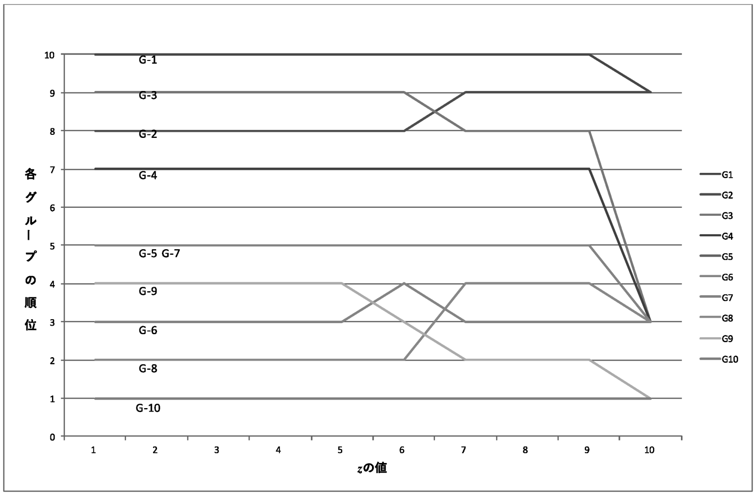

図６．x=15，y=10に固定，zの変化による順位変動

第２章においては，SGV（G－1）が最大であり，SGV（G－10）が最少であった順序が，逆転することが示されている．凹性を持つ一般の特性関数においても，SGV（G－10）が最大となることが数値計算で明らかとなった．凹性を持つ特性関数とは，各変数に関して単調増加性は保持しているが，優秀な生徒グループのShapley値の増加が逓減する性質を持っている．

第４章　結論

本研究では，協力ゲームにおけるShapley値に注目し，配分を決定する特性関数に関して新しい提案を行った．ある集団を３人ずつのグループに分けて，そのグループ内での協力ゲームにおけるShapley値の合計を最大にする組み合わせに関する議論を行った．集団を構成しているメンバーのタイプを３つに分け，組み合わされたタイプに対する特性関数を定義し，これらの特性関数に関する性質を調べることにより，集団全体のShapley値の合計を最大にする最適な組み合わせに関する定理を導いた．また，凸性を持った特性関数において，９人を３つのグループに分ける10通りの組み合わせによるShapley値の合計の大小関係について議論を行った．ここでは，本来の目的とする異なるタイプの生徒による協力関係に全体を高めるという現象を確認することができなかった．凸性を保持するということは，優秀な生徒同士の協力によってその能力を更に急激に上昇させることが可能な状況にあった．そこで，凹性を持つ限定された特性関数について調べたことにより，その大小関係が逆転することを明らかにした．すなわち，この数値結果より利得が上昇に逓減的な性質を持つ状況においては，生徒たちを混合させる方が良いという結果を示した．たとえば，協力して学習する前に優秀で既に95点を取る実力が備わっている生徒は，最高点としては100点しかない．それに対して，あまり勉強が好きでなかった20点の生徒には大

きな上昇の可能性がある．これらを反映した状況での有効性を示唆している．今後は，凸性を持つ一般的な関数に関してもその性質が保持しているかについて研究を進める．

この問題の背景にあるのは，学校教育の体制である．一般的に，義務教育では子供たちは地域という区分で教育を受けている．しかし，高等学校や大学では，学力試験で判別された能力別集団で構成されている．優秀な人材だけを集めての教育は，非常に効率的であることは理解できる．しかし，国を単位としたとき，国民の学力や国際的な競争力を上げるためには，偏差値で輪切りにされた集団での教育が最適であるかが問題となる．教育大国であるアメリカを見れば，ハーバード大学やコロンビア大学などのトップ20程度を除けば，大多数の州立大学や私立大学での学生の質には大きな差がない．入学時には，中学校程度の数学もわからない学生も同じ土俵で，厳しい教育を受けて成長していく．今後は，このような状況を反映した現実的なモデルの構築を目指したい．また，どのような状況にあるときが，偏差値順のグループでの教育が，全体での最適となるかについても議論を行う必要がある．本研究が，教育や企業での組織編制に対して，新しい見地を与えるものであると考える．

＜引用・参考文献＞

1）Adachi Yasuo and Uematsu Naoya, “Some Coalitional Games with the Shapley Value”, Mathematica Japonica, pp327-338, Vol.77, No.3, 2014.
2）安達康生，安高真一郎，植松康祐「特性関数を考慮した４人協力ゲーム」，国際研究論叢，28巻，2014年.
3）安藤哲哉『世界の数学オリンピック』，日本評論社，2003年.
4）フランクル ピーター，“official web site”，URL:http://peterfrankl.com/，2015/7/5.
5）マルクス ジョルジュ（盛田常夫 編訳）『異星人伝説 20世紀を創ったハンガリー人』，日本評論社，2001年.
6）中島秀人「ハンガリー出身の天才科学者たち」，日本物理学会誌，61巻11号，2006年.
7）Nash J.F., “Non-cooperative games”, Annals of Mathematics, pp286-295, Vol.54, No.2, 1951.
8）von Neumann J., “Zur Theorie der Gesellschaftsspiele”, Mathematische Annalen, pp295-320, Vol.100, 1928.
9）von Neumann J., *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, 1932.
10）von Neumann John & Morgenstern Oskar, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944.
11）西田俊夫『ゲームの理論』，日科技連出版社，1973年.
12）岡田章『ゲーム理論・入門（新版）』，有斐閣，2014年.
13）Shapley L.S., “A value for n-person games”, in Contributions to the Theory of games Ⅱ, pp.307-312, Annals of Mathematics Studies Vol.28, Princeton Univ. Press, 1953.
14）Shapley L.S., “Cores of convex games”, International Journal of Game Theory 1, pp11-26, 1971.
15）鈴木光男『ゲーム理論のあゆみ』，有斐閣，2014年.